Universidad Autónoma de Madrid

Facultad de Ciencias

Departamento de Física Teórica

Modelos bidimensionales de vértices
y
simetrías bajo álgebras cuánticas

Memoria presentada por

Rodolfo Cuerno Rejado

para optar al grado de

Doctor en Ciencias Físicas

Dirigida por Dr. F. Germán Sierra Rodero

Instituto de Matemáticas y Física Fundamental

Consejo Superior de Investigaciones Científicas

Madrid, Octubre 1993

A mi familia

Índice

Capítulo 1

Introducción

Los modelos integrables poseen una larga tradición en Mecánica Estadística. En esta disciplina, frente al enorme número de grados de libertad de los sistemas en estudio, se ha de recurrir a hipótesis y aproximaciones simplificadoras. *Grosso modo*, existen básicamente dos opciones para hacerlo: una de ellas es plantear el modelo más realista posible que describa el sistema físico en cuestión, y después considerar las aproximaciones necesarias que permitan el cálculo (con la precisión que se estime oportuna) de las magnitude físicas de interés, como la función de partición etc. La otra posibilidad la proporcionan los sistemas integrables. Para éstos las simplificaciones se hacen en el planteamiento del modelo, el cual es por lo común una idealización del sistema en estudio, que pretende captar las características esenciales del mismo. A partir de ahí el resto de cálculos permanecen exentos de aproximaciones. Esta manera de proceder permite comprobar de manera explícita suposiciones específicas sobre el modelo, y ha probado su utilidad en numerosos casos. El ejemplo ya clásico es el conocido modelo de Ising en dos dimensiones. No sólo ha permitido la modelización con éxito de sistemas magnéticos en una transición de fase de segundo orden, sino que su estudio ha influido decisivamente en desarrollos de tipo teórico como por ejemplo las teorías de escala o el Grupo de Renormalización de Wilson, los cuales han encontrado un campo de aplicación mucho más amplio que el contexto original en el que se formuló el modelo. Lo mismo cabría decir de otros sistemas integrables, como la cadena de Heisenberg, o el modelo de ocho vértices (8V) de Baxter; éste también tuvo una enorme importancia en el desarrollo de la moderna teoría de fenómenos críticos, al proporcionar un primer ejemplo del fenómeno de marginalidad. En general, los sistemas integrables, aparte de su posible aplicabilidad directa como modelizaciones de sistemas físicos más o menos realistas, poseen gran interés teórico por la riqueza de las estructuras que esconden. Su estudio hasta la fecha ha sido siempre fuente de ideas para nuevos desarrollos teóricos y permite por ejemplo la puesta a punto de técnicas aproximadas, al ser posible la confrontación con los cálculos explícitos. Incluso ha contribuido a la elucidación de estructuras matemáticas novedosas. Tal es el caso de los grupos cuánticos o de los invariantes de nudos. Éstas a su vez han tenido como consecuencia la definición de nuevos sistemas integrables, y una mejor comprensión del fenómeno de la integrabilidad. Esta conexión recíproca constituye el tema de fondo de la presente tesis.

El fenómeno de la integrabilidad merece un comentario más detenido. En el contexto de la Mecánica Clásica posee una definición precisa gracias al teorema de Liouville. Éste define como integrable un sistema en el que existen tantas constantes de movimiento independientes y en involución como grados de libertad tiene el sistema. Esencialmente, declara la posibilidad de encontrar una transformación a variables de acción y de ángulo. En la práctica uno ha de recurrir para lograr tal transformación a técnicas especializadas, como puede resultar el Método de Scattering Inverso Clásico. Citamos esta técnica ya que históricamente su desarrollo ha llevado al de otras que nos tocarán más de cerca en esta tesis. En el caso cuántico el concepto de completa integrabilidad está peor definido, y en general suele considerarse que un sistema es exactamente resoluble cuando es posible calcular el espectro del conjunto maximal de operadores que conmutan y algunos correladores. En Mecánica Estadística basta con poder calcular la función de partición, así como algunas cantidades físicas de interés, como susceptibilidades o imanaciones, para considerar exactamente resuelto un cierto modelo. En la presente tesis nuestro estudio se centra en sistemas estadísticos en dos dimensiones y los sistemas mecanocuánticos unidimensionales asociados, de manera que será esta definición práctica de integrabilidad la que se asuma aquí. En particular, para un sistema estadístico en el límite termodinámico, necesitaríamos como condición de integrabilidad la conmutatividad de un número infinito de observables independientes. Veremos que la llamada ecuación de Yang–Baxter (YB) codifica de una manera muy conveniente este requerimiento. Dicha ecuación apareció ya en la forma de la transformación “estrella–triángulo” en la solución por Onsager del modelo de Ising bidimensional para campo cero. Más tarde volvió a surgir en los trabajos de Yang sobre un hamiltoniano unidimensional de bosones con repulsión de tipo delta, y en los de Baxter sobre el modelo de 8V. La ecuación YB se caracteriza por su ubicuidad en los sistemas integrables bidimensionales, y puede entenderse esencialmente como una definición de los mismos. Esta última observación introduce la cuestión sobre la dimensionalidad. Efectivamente, la mayor parte de los sistemas integrables que se conocen en Mecánica Estadística lo son en dimensiones 1, 2 ó infinita. Existe una generalización tridimensional de la ecuación de YB, debida a Zamolodchikov, y hay alguna solución no trivial para la misma, pero el tema no ha conseguido un gran desarrollo hasta el momento. Como se apuntó arriba, nosotros estamos interesados en la consideración de sistemas en 2d, y de sus equivalentes cuánticos unidimensionales. Es en ellos donde la YB es la expresión de la integrabilidad, y su estudio, aunque inscrito como vemos en una trayectoria que viene de mucho más atrás, ha desempeñado un papel clave en el tremendo desarrollo experimentado por la Física Teórica bidimensional en los años recientes. En este sentido, resulta interesante notar también cómo esta disciplina ha convergido con otra antigua línea de investigación en sistemas exactamente resolubles[1]: esto es, los modelos que admiten solución por medio del Ansatz de Bethe. Se trata de problemas cuánticos en una dimensión discreta, de los cuales el primer ejemplo histórico es la cadena de Heisenberg (un modelo que suele conocerse como el XXX en relación a la isotropía entre las interacciones de las componentes de los espines vecinos próximos). Este modelo fue resuelto por Bethe en el año 1931. Con posterioridad se propusieron diversas generalizaciones del mismo, y no fue sino hasta comienzos de los años 70 cuando Sutherland observó la conmutatividad del hamiltoniano del modelo (cuántico unidimensional) XYZ con la matriz de transferencia del modelo (clásico bidimensional) de 8V. Baxter mismo fue quien comprobó que de hecho el hamiltoniano del primero no era más que la derivada logarítmica de la mencionada matriz de transferencia. De nuevo, los sistemas resolubles por medio del Ansatz de Bethe son algo más que bancos de pruebas de técnicas analíticas o métodos de aproximación, como demuestran su utilización en problemas como el efecto Kondo, o el modelo de Hubbard estudiado en el contexto de la superconductividad.

Existe un formalismo que incorpora todos estos hechos de manera constructiva, y a la vez los reúne con el otro gran campo de la integrabilidad exacta: esto es, con las ecuaciones diferenciales integrables no lineales, como las conocidas de KdV, Schrödinger no lineal o Sine–Gordon, por citar algunos ejemplos. Se trata del Método de Scattering Inverso Cuántico (MSIC) y de su versión Clásica ya mencionada. Este método ha sido desarrollado fundamentalmente por la escuela rusa, y, aunque con escasas referencias a los trabajos fundamentales, usaremos la descripción que proporciona de los sistemas integrables. Pueden verse por ejemplo las introducciones de Takhtadzhan y Faddeev 1979, Kulish y Sklyanin 1982 ó de Vega 1989. Su desarrollo ha tenido como fruto destacado la formulación de los grupos cuánticos por Drinfeld y Jimbo a mediados de los años 80. Estas estructuras algebraicas abstraen los ingredientes fundamentales de los modelos integrables y los formulan en términos de las deformaciones de álgebras de Lie afines y no afines, dadas por (generalmente) un parámetro continuo q; posteriormente se han definido deformaciones de otras estructuras, como son las superálgebras. Como se ha visto a lo largo de estos últimos años, grandes clases de modelos integrables se pueden entender en su definición a través de la teoría de representaciones de álgebras cuánticas[2]. No sólo eso, sino que dicha teoría de representaciones presenta novedades muy interesantes, especialmente en el caso en el que el parámetro de deformación q es una raíz de la unidad: en tales casos las representaciones que eran meras "q–deformaciones" de las de las álgebras no deformadas presentan ciertas patologías, y por otro lado aparecen nuevas representaciones que carecen de análogos

[1] Los trabajos originales que estamos citando aquí se pueden encontrar por ejemplo en la recopilación de Mattis 1993.

[2] En ocasiones utilizaremos los términos "álgebra" y "grupo" de manera equivalente, aunque en esta tesis pensaremos siempre en términos de la primera.

"clásicos" [3]. De hecho los grupos cuánticos prueban su relevancia en prácticamente todos los aspectos mencionados de la integrabilidad; por citar algunos ejemplos:

Las matrices de pesos de Boltzmann para los modelos estadísticos de vértices actúan como interpoladoras en las álgebras cuánticas afines. También los pesos de Boltzmann de otros modelos estadísticos integrables como los modelos IRF o el modelo de Potts quiral pueden entenderse como elementos de la teoría de representaciones de las álgebras cuánticas. El álgebra de fusión en las Teorías Racionales de Campos Conformes bidimensionales refleja la regla de descomposición del producto tensorial de irreducibles bajo el grupo cuántico. También existen Teorías (integrables) de Campos bidimensionales, pero en regímenes masivos, para las que las simetrías del modelo forman representaciones de álgebras cuánticas (modelo de Sine–Gordon), o para las que la matriz de scattering factorizable de los solitones vuelve a estar relacionada con la interpoladora en determinadas álgebras cuánticas afines, caso de modelos de Ginzburg–Landau para teorías supersimétricas $N = 2$. Y muchos más ejemplos.

De forma prácticamente simultánea a la definición de los grupos cuánticos, se encontraron nuevos invariantes de nudos y se produjo el desarrollo de las Teorías de Campos Conformes bidimensionales, y, posteriormente, de las Teorías Topológicas de Campos. Es muy notable el hecho de que las representaciones de álgebras cuánticas proporcionan a su vez medios de construir invariantes de nudos debido en esencia al papel destacado que el grupo de trenzas juega en las primeras. Así, ambas disciplinas se han influido mutuamente en sus respectivos desarrollos de forma considerable.

En resumen, la teoría de grupos cuánticos está conectada con prácticamente todos los campos de la integrabilidad en bajas dimensiones, desde la Teoría de Campos a los hamiltonianos cuánticos para cadenas de espines. Y además desempeña un papel básico en la estructura de dichas teorías. La conexión precisa es un tema en el que todavía existe una gran actividad. Máxime considerando que su desarrollo ha convergido con el de diversas ramas de gran actualidad en la Física Teórica y en las Matemáticas. Por otro lado, otra cuestión abierta es encontrar modelos realistas que posean grupos cuánticos como simetrías. Un primer paso bastante natural en esta dirección es el estudio de cadenas de espines que satisfagan dicho requerimiento.

Merece la pena destacar el que, a pesar de haber sido un modelo que ha suscitado gran parte de los anteriores desarrollos, el modelo de 8V de Baxter permanece curiosamente "reacio" a admitir una interpretación como matriz intrepoladora en el contexto de alguna álgebra cuántica. Probablemente los nuevos esfuerzos que se hagan en esa dirección contribuyan a sacar a la luz nuevos desarrollos teóricos y quizá nuevas estructuras algebraicas.

La presente memoria de tesis describe una serie relativamente heterogénea de trabajos, tanto en la definición de nuevos sistemas integrables a partir de la teoría de representaciones de álgebras cuánticas, como en la interpretación de elementos de la teoría de sistemas inte-

[3] Por "no deformados".

grables, o de modelos previamente conocidos, a la luz de los grupos cuánticos. Nos centramos en modelos estadísticos de vértices. Para ellos resultan especialmente transparentes tanto su definición en función de elementos de las álgebras cuánticas, como su conexión con sistemas cuánticos unidimensionales, y por último la simetría explícita del sistema bajo la acción del álgebra cuántica. Dos temas que de una manera u otra subyacen a todos los trabajos que se exponen en las páginas que siguen son las representaciones para q raíz de la unidad y la cuestión de las condiciones de frontera en la cadena unidimensional. En concreto, tras introducir muy brevemente los modelos de vértices en el primer capítulo, en el segundo se estudia la manera de construir cadenas invariantes bajo las álgebras cuánticas, que depende de manera crucial de los términos de frontera. Se propone una interpretación a la luz de los grupos cuánticos, del procedimiento usual de implemantación de estas condiciones. En el capítulo tercero se estudian los modelos de vértices con condiciones de cadena abierta (para el hamiltoniano unidimensional equivalente) asociados tanto a un tipo de representaciones no restringidas del álgebra cuántica $\mathcal{U}_q(sl(2))$ para q raíz de la unidad, denominadas representaciones nilpotentes, como a representaciones regulares de la misma álgebra. En ambos casos, los pesos de Boltzmann con que se definen los diversos modelos son funciones trigonométricas de los parámetros del sistema. En los capítulos cuarto y quinto el modelo que se estudia puede considerarse la generalización elíptica de los modelos anteriores (en el caso específico $q^4 = 1$), siendo una de las motivaciones de fondo el entender el caso correspondiente al modelo 8V de Baxter (asimismo un modelo elíptico); el modelo que nosotros estudiamos es un sistema de fermiones libres conocido desde finales de los años 60, que contiene como casos particulares toda una colección de modelos integrables notables. Se determina el álgebra cuántica asociada con su matriz de pesos de Boltzmann y también se hacen ciertas consideraciones relativas al caso de cadena abierta. Finalmente, en el capítulo quinto se estudia un elemento de gran relevancia en el contexto de los modelos estadísticos sobre el retículo, como es la matriz de transferencia triángulo de Baxter, y más en concreto su límite hamiltoniano. Nuevamente un objeto de gran relevancia en la construcción de sistemas integrables es probablemente susceptible de tener un significado estructrural para álgebras cuánticas de tipo afín.

Una nota sobre la redacción de esta memoria. Como se verá, en general se ha procurado dedicar la mínima extensión tanto a reproducir material que ya se puede considerar estándar, como a detallar la mayor parte de los cálculos algebraicos, fundamentalmente los que corresponden a las soluciones para las matrices $K_{\pm}$, o los relacionados con la matriz $R(u)$ de Bazhanov–Stroganov. Respecto al primer punto, hemos optado por citar exclusivamente los hechos básicos (prácticamente el lenguaje) relativos a modelos de vértices o a las álgebras cuánticas, confiando que las referencias (que en modo alguno pretenden ser exhaustivas) llenen las abundantes lagunas que dejamos en esta exposición. Quizá la más llamativa sea la que toca a las ecuaciones del Ansatz de Bethe. En el capítulo 3 se han utilizado sin derivación previa, con lo que hemos procurado proveer un número algo mayor de referencias “puntuales”. Respecto a la cuestión de los cálculos explícitos, se han reproducido los que se han considerado suficientemente significativos, bien porque, como en el caso del tratamiento de tamaño finito, aparecen aquí por vez primera (aunque siguiendo muy de cerca referencias previas de otros autores), bien porque se consideraba que, en cierta medida, el contenido fundamental era precisamente un planteamiento específico del cálculo en cuestión, caso del capítulo 5.

Capítulo 2

Modelos de vértices

En este capítulo se hace un breve esbozo del tema de los sistemas integrables en retículos bidimensionales, centrando la discusión en el tipo de sistemas que son el objeto de la presente tesis, los llamados modelos de vértices. Se expone de forma somera la construcción de un modelo de vértices genérico a través de la matriz de transferencia, la cual resulta muy conveniente tanto para formularlo como para analizar su integrabilidad. El ingrediente básico con que se construyen estos modelos, v. g. la matriz $R(u)$ de pesos de Boltzmann, así como la ecuación que codifica la integrabilidad, la YB, admiten en la mayoría de casos conocidos interpretación en el contexto de las álgebras cuánticas afines, que son deformaciones continuas de las álgebras de Lie afines o de Kač–Moody. Las condiciones de contorno que se utilizan en este capítulo son las más sencillas, esto es, las de cadena cerrada. La introducción de condiciones de frontera distintas a éstas, pero que conservan la integrabilidad, se estudia en el capítulo siguiente.

Por último, se describe brevemente la construcción de la llamada matriz de transferencia triángulo (Corner Transfer Matrix, CTM) de Baxter, para modelos de vértices. Dicho objeto también posee en algunos casos interpretación en el contexto de las álgebras cuánticas afines. Elucidar dicha interpretación será parte de nuestro análisis en el capítulo 5. El que aquí comienza tiene el fin de establecer las notaciones y los hechos más básicos referidos a los modelos estadísticos que nos ocupan en el resto de la presente memoria.

2.1 Matriz de transferencia fila a fila.

Un modelo de vértices (bidimensional) es un sistema estadístico en el que se coloca una variable sobre cada lado de un retículo cuadrado, la cual puede tomar cualquier valor de entre una colección dada. La interacción tiene lugar en los vértices del retículo, en cada uno de los cuales convergen cuatro lados. Es posible asignar de esta manera un peso de Boltzmann a cada vértice $w(a, b, c, d|u)$ (ver figura 1.1), que depende de los valores $a, b, c, d = 1, \ldots, s$, de las cuatro variables de los lados que se cortan en ese vértice, y un parámetro u que llamaremos espectral,

Figura 2.1: Peso de Boltzmann de un modelo de vértices.

y en el que a este nivel podemos pensar como dando cuenta de las constantes de acoplo en el vértice. En la descripción equivalente en términos de matrices S factorizables (Zamolodchikov y Zamolodchikov 1979), u representa la diferencia de rapidities en el proceso de scattering factorizable representado por el mismo vértice. Los pesos de Boltzmann que uno considera en la definición de la función de partición son numeros reales positivos, que en general estarán definidos salvo un factor multiplicativo global. Con frecuencia en las manipulaciones formales los pesos se considerarán, sin embargo, como números complejos genéricos. Sería necesario considerar entonces con detalle en qué rango de parámetros suponen un modelo físicamente aceptable. Para un retículo con L filas y M columnas, definamos una matriz que llamaremos de monodromía, como

$$T(u) = R_{0L}(u)R_{0L-1}(u)\cdots R_{01}(u). \tag{2.1}$$

Si llamamos V_j al espacio vectorial formado por los estados del lado j, en un caso genérico la matriz $R(u)$ actúa $R(u) : V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2$, y sus elementos están dados por $R(u)_{ab}^{cd} = w(a, b, c, d|u)$. En (2.1) se denota por 0 el espacio de lados horizontales (llamado auxiliar) y por j el de lados verticales (o cuántico; todas estas denominaciones proceden del MSIC) para el vértice j-ésimo. La matriz de transferencia queda definida por

$$t(u) \equiv \mathrm{Tr}_0 T(u), \tag{2.2}$$

donde la traza supone tomar condiciones periódicas en la dirección horizontal, de forma que la función de partición del retículo, suponiendo periodicidad en la dirección vertical, es $Z = \mathrm{Tr}\ t(u)^M$. Así el cálculo de esta suma estadística se ha reexpresado como un problema de Mecánica Cuántica, a saber, el cálculo de los autovalores del operador sobre $V^{\otimes L}$, $t(u)$. La condición que asegura la integrabilidad del modelo es la celebrada ecuación de Yang–Baxter

(YB). Para los modelos de vértices esta condición se escribe como sigue[1].

$$R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u). \tag{2.3}$$

Aquí $R_{ij}(u)$ denota una matriz sobre el espacio $V^{\otimes 3}$, que actúa como $R(u)$ sobre las componentes i-ésima y j-ésima, y como la identidad sobre la restante. Esta ecuación posee invariancias en el sentido de transformaciones (usualmente conocidas como transformaciones gauge, al poder pensar en ellas como transformaciones en el espacio auxiliar) de la matriz R, que pueden o no depender del parámetro espectral u, y que en cualquier caso preservan YB para la matriz transformada (de Vega 1984). Estas transformaciones pueden interpretarse como cambios de base diagonales en el espacio V. Veremos ejemplos de ellas en los capítulos que siguen.

Utilizando (2.1) tenemos para la matriz de monodromía

$$R_{12}(u-v) \overset{1}{T}(u) \otimes \overset{2}{T}(v) = \overset{2}{T}(v) \otimes \overset{1}{T}(u) R_{12}(u-v), \tag{2.4}$$

donde los índices 1, 2 hacen referencia a las correspondientes copias del espacio auxiliar, y $\overset{1}{T}$ por ejemplo es la abreviatura de $T \otimes \mathbf{1}$. Si R es una matriz invertible, despejando en (2.4) y tomando trazas llegamos a la conmutatividad de la matriz de transferencia

$$[t(u), t(v)] = 0 \quad \forall u, v. \tag{2.5}$$

Tenemos así una familia uniparamétrica de matrices de transferencia que conmutan. Coloquemos en los espacios cuántico y auxiliar copias de un mismo espacio V, y supongamos que en tal caso la matriz $R(u)$ satisface la condición llamada de regularidad:

$$R(0)_{ij} = \zeta^{1/2}(0)\mathcal{P}_{ij}, \tag{2.6}$$

donde $\mathcal{P}_{ij}$ es la permutación de los espacios i, j y $\zeta(u)$ una cierta función escalar de u. Se satisfacen las propiedades

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ij} &= \mathcal{P}_{ji}, \\ \mathcal{P}_{ij}\mathcal{P}_{ji} &= \mathbf{1}, \\ \mathcal{P}_{ij}R_{jk} &= R_{ik}\mathcal{P}_{ij}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

En este caso, salvo factores numéricos, $T(0)$ es el operador de traslación de un paso sobre la cadena lineal de vértices (análogo discreto de la exponencial del momento $e^{\mathrm{i}P}$), y puede definirse una familia infinita de integrales de movimiento locales $\{H_k\}$:

$$H_k \equiv \frac{d^k}{du^k} \ln t(u) \Big|_{u=0} \tag{2.8}$$

[1]Aquí suponemos que se satisface la propiedad de la diferencia de forma que $R_{12}(u_1, u_2) = R_{12}(u_1 - u_2)$. Hay soluciones de YB en las que la variable u vive en curvas de género mayor que 1, para las que ya no se tiene esta propiedad. No son, sin embargo, modelos de vértices.

que conmutan

$$[H_k, H_n] = 0 \quad \forall k, n. \tag{2.9}$$

En general H_k es un operador que acopla $k+1$ vecinos (Lüscher 1976). Por ejemplo consideraremos H_1 como el hamiltoniano de una cadena de espines unidimensional: acopla sólo vecinos próximos y es la derivada logarítmica de la matriz de transferencia; aparece como el generador infinitesimal de la evolución temporal de la cadena lineal de espines en un límite muy anisótropo de las constantes de interacción, véase Kogut (1979). (2.9) define la teoría como integrable, con lo que querremos decir que por ejemplo pueden calcularse de forma exacta cantidades de interés físico como el espectro de las anteriores integrales de movimiento (Sklyanin 1992).

2.2 Matriz de transferencia triángulo.

Si derivamos en (2.3) respecto a v e imponemos $v = 0$, se tiene

$$\dot{R}_{12}(u) R_{13}(u) - R_{12}(u) \dot{R}_{13}(u) = [R_{12}(u) R_{13}(u), H_1]\,. \tag{2.10}$$

Reetiquetemos los espacios $1 \to 0$, $2 \to j$, $3 \to j+1$; multiplicamos la anterior ecuación por la izquierda por el producto $\prod_{i<j} R_{0i}(u)$ y por la derecha por $\prod_{i>j+1} R_{0j}(u)$, multiplicamos toda la ecuación restante por j y sumamos en j de $-\infty$ a $+\infty$. Queda

$$\frac{dt(u)}{du} = [H_{CTM}, t(u)]\,, \qquad H_{CTM} \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j\; H_{j,j+1}. \tag{2.11}$$

Nótese que en la definición (2.11) interviene de forma decisiva la ecuación de Yang–Baxter. H_{CTM} es el análogo en la red del generador del boost de Lorentz para $t = 0$ (Tetel'man 1982, Thacker 1986)[2]. Genera los desplazamientos en el parámetro espectral en la matriz de transferencia, y la conmutatividad (2.5) expresa así la de dos matrices de transferencia para el mismo retículo, evaluadas en sistemas de referencia distintos. De hecho, H_{CTM} proporciona la versión discreta (y formalmente extendible al régimen masivo) del generador L_0 de Virasoro (Itoyama y Thacker 1989). Por otro lado, permite generar las integrales de movimiento una a partir de otra[3]

$$[H_{CTM}, H_k] = H_{k+1}. \tag{2.12}$$

Pero además H_{CTM} posee otro significado de gran relevancia, como generador infinitesimal de la matriz de transferencia triángulo (CTM, Baxter 1982). Originalmente, Baxter introdujo dicha matriz de transferencia con la intención de obtener de manera sencilla la función a un punto (imanación) del sistema estadístico. En los casos integrables, se observó que la estructura

[2]Recordar que en el continuo el boost es $\int dx\ (xH(x) - tP(x))$.

[3]En relación con este hecho se le da el nombre de “simetría maestra”.

Figura 2.2: CTM para un cuadrante en un modelo de vértices.

del espectro de estas matrices era notablemente simple: sus autovalores, en una normalización adecuada, tienen la forma e^{-E_n}, estando los E_n más bajos espaciados de forma regular a todas las temperaturas, y de manera tal que el espaciado tiende a cero en el punto crítico. Dicha estructura regular para el espectro es un ingrediente fundamental en la interpretación algebraica del operador H_{CTM} introducido arriba.

La CTM en general añade al retículo una porción triangular; aquí nos interesa el caso en el que dicho triángulo es un cuadrante completo, como el que se muestra en la figura 1.2. En tal caso, la CTM proporciona una rotación de 90^{o} a la fila de vértices construida con (2.1). Si damos un giro de 45^{o} a la figura, podemos pensar en la CTM como la matriz que origina la evolución diagonal en el retículo. Los valores de los espines $\{\sigma_i\}_1^L$, $\{\sigma_i'\}_1^L$ se fijan a algún valor de referencia, usualmente la configuración del estado fundamental. Como nuestras consideraciones se centrarán en el límite termodinámico $L \to \infty$, no nos ocuparemos de dichos valores. Hay formas de introducir condiciones de contorno a través suyo, como líneas de defecto (Eckle y Truong 1993a).

La región de la figura 1.2 se construye de la siguiente manera. Primero formamos una fila de $L-(j-1)$ vértices análoga a (2.1):

$$G_j^{(L)}(u) = R_L(u)R_{L-1}(u)\cdots R_j(u). \tag{2.13}$$

donde prescindimos de la distinción (propia de la evolución "vertical") entre espacios auxiliar y cuántico, y $R_j(u)$ es la matriz de pesos de Boltzmann en el vértice j–ésimo de la fila. Por último, construímos la CTM para la región con forma de cuadrante definiendo

$$A_L(u) = G_1^{(L)}(u)G_2^{(L)}(u)\cdots G_L^{(L)}(u). \tag{2.14}$$

En estas condiciones es posible mostrar, en el límite termodinámico $L \to \infty$, que la CTM

(2.14) normalizada por su autovalor máximo, $A_n(u)$, posee la propiedad

$$A_n(u)A_n(v) = A_n(u+v).$$

De hecho, se puede escribir

$$A_n(u) = e^{-uH_{CTM}},$$

donde H_{CTM} es precisamente el operador independiente de u dado por (2.11), como se determina a través de la expansión de (2.14) para valores del parámetro espectral cercanos a 0, y utilizando la regularidad de la matriz $R(u)$.

Capítulo 3

Condiciones de Contorno

Como se ha visto en el capítulo anterior, la imposición de condiciones de contorno periódicas en las dos direcciones del retículo es un elemento importante en la construcción de los modelos integrables de vértices. Sin embargo, hay situaciones físicas en las que resulta relevante considerar términos de frontera que no sean triviales en este sentido. Veremos más adelante cómo afecta esto a las propiedades del modelo tales como el valor de la extensión central de la teoría conforme correspondiente en el punto crítico, o las simetrías del hamiltoniano unidimensional. En cualquier caso sería deseable considerar condiciones de contorno que no supongan perder la integrabilidad del modelo. Éste es el objeto del capítulo que aquí empieza, en el que introduciremos dos tipos de condiciones de frontera diferentes de las periódicas, pero que satisfacen el requisito de integrabilidad, a saber:

- Cadena con twist.
- Cadena abierta.

Mencionaremos brevemente las interpretaciones que se les puede dar en cada caso; en el capítulo siguiente tendremos ocasión de ver modelos en los que tiene análogas consecuencias físicas tomar condiciones con twist o de cadena abierta. Prestaremos especial atención en un ejemplo a soluciones constantes de las ecuaciones de reflexión asociadas con cadenas abiertas, muy íntimamente relacionadas con la teoría de álgebras cuánticas. El ejemplo será la construcción de cadena abierta para el modelo de seis vértices de Lieb (ver Baxter 1982), cuya matriz R es la interpoladora entre dos copias de $V^{1/2} \otimes V^{1/2}$, con $V^{1/2}$ la representación regular de espín 1/2 de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ (Jimbo 1985, 1986b). Mostraremos que las matrices de reflexión constantes con que se construye la cadena invariante bajo transformaciones de $\mathcal{U}_q(sl(2))$, no son esencialmente más que el elemento q^{-H} del álgebra $\mathcal{U}_q(sl(2))$ en la representación correspondiente. En el capítulo 3 veremos que la misma interpretación se extiende a cadenas simétricas $\mathcal{U}_q(sl(2))$ con q raíz de la unidad, en representaciones nilpotentes; de esta manera se entenderán ciertas singularidades que en tal caso aparecen al construir el hamiltoniano de cadena abierta.

3.1 Cadena con twist.

Consideremos un modelo de vértices definido mediante la matriz de pesos de Boltzmann $R(u)$. En adelante supondremos que ésta satisface la condición de regularidad (2.6), así como las siguientes propiedades de simetría:

$$\begin{array}{rl} \text{Simetría P} & \mathcal{P}R(u)\mathcal{P} = R(u), \\ \text{Simetría T} & R^{t_{12}}(u) = R(u), \\ \text{Unitariedad} & R(u)R(-u) = \zeta(u)\ \mathbf{1}, \\ \text{Simetría de cruce} & R^{t_1}(u)R^{t_1}(-u-2\eta) = \tilde{\zeta}(u)\ \mathbf{1}, \end{array}$$

donde $\zeta(u)$ y $\tilde{\zeta}(u)$ son funciones escalares de la variable u, η es una cierta constante que llamaremos parámetro de cruce y t_j indica la trasposición en el espacio j. Los nombres de las simetrías proceden de su analogía formal con las propiedades análogas satisfechas por los elementos de matriz S en teorías de matriz S factorizable (ver por ejemplo Wadati et al. 1989). Las condiciones de contorno con twist se pueden introducir notando que cualquier matriz constante K que satisfaga

$$[R(u), K \otimes K] = 0, \tag{3.1}$$

no altera la condición de integrabilidad (2.4). Esta matriz supone un primer ejemplo de las transformaciones llamadas gauge en este contexto. De esta manera las matrices de transferencia

$$t_{\text{twist}}(u) \equiv \mathrm{Tr}_0 \left(\overset{0}{K}\ R_{0L}(u) \cdots R_{01}(u) \right) \tag{3.2}$$

forman una familia conmutativa uniparamétrica. La derivada logarítmica de (3.2) es un hamiltoniano para una cadena unidimensional de L espines que satisface condiciones de tipo periódico salvo un twist (de Vega 1984). Por ejemplo, para el modelo 6V de Lieb la matriz de pesos de Boltzmann $R(u)$ se escribe (damos sólo los pesos no nulos)

$$R(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(u+\mathrm{i}\gamma) & & & \\ & \mathrm{sen}(u) & \mathrm{sen}(\mathrm{i}\gamma) & \\ & \mathrm{sen}(\mathrm{i}\gamma) & \mathrm{sen}(u) & \\ & & & \mathrm{sen}(u+\mathrm{i}\gamma) \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

donde γ es un parámetro que físicamente aparece como la anisotropía del modelo XXZ unidimensional asociado:

$$H = \frac{1}{2\ \mathrm{sen}(\gamma)} \sum_{j=1}^{L} \left\{ \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \Delta \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \right\}, \tag{3.4}$$

$$\Delta \equiv \cos(\gamma). \tag{3.5}$$

L es el tamaño de la cadena, y $\vec{\sigma}_j$ son las matrices de Pauli actuando en la posición j–ésima. Una famila de soluciones de (3.1) es

$$K = e^{i\phi\sigma_z}, \tag{3.6}$$

con ϕ un parámetro arbitrario que llamaremos ángulo de twist. (3.3) satisface las simetrías consideradas arriba con $2\eta = i\gamma$. Para la matriz de transferencia (3.2), el modelo unidimensional asociado consiste en el hamiltoniano (3.4) con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \sigma^z_{L+1} &= \sigma^z_1 \\ \sigma^\pm_{L+1} &= \sigma^x_{L+1} \pm i\sigma^y_{L+1} = e^{\pm 2i\phi}\sigma^\pm_1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

En el límite continuo de este modelo, las condiciones twisteadas puede verse que equivalen al modelo inicial con condiciones de contorno periódicas, al que se le ha añadido un campo externo que implementa el twist (Destri y de Vega 1989), y cuyo peso conforme modifica la extensión central de la teoría completa.

El ejemplo anterior se puede generalizar a otros modelos, como los dados por matrices R asociadas a representaciones de espín superior, etc. El ingrediente esencial es la ecuación (3.1).

3.2 Cadena abierta.

Otra posibilidad respecto a las condiciones de contorno de un modelo de vértices es la de considerar una cadena abierta. Si se quiere construir modelos integrables explícitamente invariantes bajo álgebras cuánticas, será necesitario imponer condiciones de frontera de este tipo[1].

La idea consiste en construir una matriz de transferencia que incluya matrices de pesos de Boltzmann para los extremos de la cadena, y que llamaremos $K_\pm(u)$ (una en cada extremo). En el límite hamiltoniano éstas serán las que originen operadores actuando sobre los espacios cuánticos primero y L-ésimo. $K_\pm(u)$ admiten una interpretación como matrices S de reflexión elástica con una pared (Cherednik 1984). Lo que necesitamos es caracterizar las condiciones para que la matriz de transferencia así construida forme una familia uniparamétrica conmutativa. Para una matriz $R(u)$ regular y con las simetrías vistas en la sección anterior, se prueba (Sklyanin 1988) que, siempre que

$$\begin{aligned} R_{12}(u_1-u_2) \overset{1}{K}_-(u_1) R_{12}(u_1+u_2) \overset{2}{K}_-(u_2) = \\ = \overset{2}{K}_-(u_2) R_{12}(u_1+u_2) \overset{1}{K}_-(u_1) R_{12}(u_1-u_2), \end{aligned} \tag{3.8}$$

[1]Para el caso de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ ver Pasquier y Saleur 1990, Kulish y Sklyanin 1991; para otras álgebras cuánticas o el caso de espines en representaciones de dimesión más alta que la fundamental, véanse Mezincescu et al. 1990, Mezincescu y Nepomechie 1991b, 1992c.

$$\begin{aligned} & R_{12}(-u_1+u_2)\stackrel{1}{K}_+(u_1)R_{12}(-u_1-u_2-2\eta)\stackrel{2}{K}_+(u_2)= \\ & =\stackrel{2}{K}_+(u_2)R_{12}(-u_1-u_2-2\eta)\stackrel{1}{K}_+(u_1)R_{12}(-u_1+u_2), \end{aligned} \tag{3.9}$$

entonces la matriz de transferencia definida por (denotamos “abierta” por el subíndice a)

$$\begin{aligned} t_a(u) &\equiv \mathrm{Tr}_0\left(K_+(u)T(u)K_-(u)T^{-1}(-u)\right) \\ T(u) &= R_{0L}(u)\cdots R_{01}(u) \end{aligned} \tag{3.10}$$

define un modelo integrable:

$$[t_a(u),t_a(v)]=0 \quad \forall u,v. \tag{3.11}$$

La traza está tomada sobre el espacio auxiliar, que es donde actúan las matrices $K_\pm(u)$. Si se satisfacen la regularidad

$$R(0)=\mathcal{P} \tag{3.12}$$

y la condición

$$K_-(0)=\mathbf{1}, \tag{3.13}$$

el hamiltoniano de cadena abierta definido por la matriz de transferencia $t_a(u)$ es (Sklyanin 1988)

$$H=\frac{1}{2\,\mathrm{Tr}K_+(0)}\left\{t_a'(0)-\mathrm{Tr}K_+'(0)\right\}=\sum_{j=1}^{L-1}H_{j,j+1}+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\stackrel{1}{K'}_-(0)+\frac{\mathrm{Tr}_0\stackrel{0}{K}_+(0)H_{L0}}{\mathrm{Tr}K_+(0)}, \tag{3.14}$$

donde la prima denota derivada respecto al parámetro espectral u y

$$H_{j,j+1}\equiv\mathcal{P}_{j,j+1}\left.\frac{dR(u)}{du}\right|_{u=0}. \tag{3.15}$$

Nótese que la expresión (3.14) no está bien definida si

$$\mathrm{Tr}K_+(0)=0. \tag{3.16}$$

De hecho, más adelante vamos a encontrar casos en los que precisamente se da esta condición. Sin embargo, si en ellos se cumple además que

$$\mathrm{Tr}_0(\stackrel{0}{K}_+(0)H_{L0})=A\ \ \mathbf{1}, \tag{3.17}$$

donde A es una constante, puede verse (Cuerno et al. 1993a; Cuerno y González–Ruiz 1993) que el siguiente hamiltoniano de cadena abierta está bien definido y conmuta con la matriz de transferencia $t_a(u)$:

$$\begin{aligned} H &\equiv \frac{t_a''(0)}{4(T+2A)}= \\ &= \sum_{j=1}^{L-1}H_{j,j+1}+\frac{1}{2}\stackrel{1}{K'}_-(0)+\frac{1}{2(T+2A)}\times \\ & \left\{\mathrm{Tr}_0(\stackrel{0}{K}_+(0)G_{L0})+2\mathrm{Tr}_0(\stackrel{0}{K'}_+(0)H_{L0})+\mathrm{Tr}_0(\stackrel{0}{K}_+(0)H_{L0}^2)\right\}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde

$$\begin{aligned} T &\equiv \mathrm{Tr} K'_+(0) \\ G_{j,j+1} &\equiv \mathcal{P}_{j,j+1} \left. \frac{d^2 R_{j,j+1}(u)}{du^2} \right|_{u=0} . \end{aligned}$$

En el capítulo anterior se mencionó que la derivada segunda de la matriz de transferencia era en general una constante del movimiento que involucraba acoplos a segundos próximos vecinos. Aquí son precisamente la condición de traza nula para $K_+(u = 0)$ y (3.17) las responsables de que en (3.18) no aparezcan dichos acoplos.

Tomemos como ejemplo el modelo 6V: la solución diagonal más general para la matriz $K_-(u)$ es (Cherednik 1984)

$$K_-(u) = \frac{1}{\mathrm{sen}(\xi_-)} \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(u+\xi_-) & \\ & -\mathrm{sen}(u-\xi_-) \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

donde ξ_- es un parámetro arbitrario. Esta matriz puede expresarse como la siguiente combinación lineal

$$K_-(u) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\ \mathrm{sen}(\xi_-)} \left\{ e^{\mathrm{i}\xi_-} U(u) - e^{-\mathrm{i}\xi_-} U^{-1}(u) \right\}, \tag{3.20}$$

donde

$$U(u) = \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}u} & \\ & e^{-\mathrm{i}u} \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

es solución de (3.8), y también lo es su inversa. La matriz $K_+(u)$ puede obtenerse como $K_+(u) = K_-(-u - \mathrm{i}\gamma)$, y dependerá de un parámetro arbitrario ξ_+ independiente de ξ_-. Estas matrices proporcionan condiciones de frontera de cadena abierta compatibles con la integrabilidad (las hay más generales, ver de Vega y González–Ruiz 1993). Entre ellas se encuentran las necesarias para que el hamiltoniano correspondiente sea invariante bajo transformaciones de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ en la representación fundamental. Recordemos que esta álgebra cuántica tiene como generadores los $\{E, F, K\}$, que satisfacen relaciones de conmutación

$$[E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, \qquad KE = q^2 EK, \qquad KF = q^{-2} FK. \tag{3.22}$$

La comultiplicación Δ se define

$$\Delta(E) = K \otimes E + E \otimes \mathbf{1}, \qquad \Delta(F) = \mathbf{1} \otimes F + F \otimes K^{-1}, \qquad \Delta(K) = K \otimes K. \tag{3.23}$$

La representación fundamental es la dada por

$$E = \sigma_+, \qquad F = \sigma_-, \qquad K = \begin{pmatrix} q & \\ & q^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Coincide con la fundamental de $su(2)$ (espín 1/2). Pedir invariancia del hamiltoniano consiste en buscar las condiciones bajo las cuales

$$[H, \Delta^{(L)}(g)] = 0, \tag{3.25}$$

con g cualquier generador de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ en la irrep considerada, y $\Delta^{(L)}$ la comultiplicación aplicada L veces (para una cadena con L espines). En el ejemplo que estamos viendo es sencillo ver que la solución $K_-(u) = U(u)$, o equivalentemente el límite $\xi_\pm \to -\mathrm{i}\infty$, supone el hamiltoniano ($q = e^{\mathrm{i}\gamma}$)

$$H = \frac{1}{2\,\mathrm{sen}(\gamma)} \left\{ \sum_{j=1}^{L-1} \left\{ \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \frac{q+q^{-1}}{2} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \right\} + \frac{q-q^{-1}}{2} (\sigma_1^z - \sigma_L^z) \right\}, \tag{3.26}$$

invariante bajo $\mathcal{U}_q(sl(2))$ en la representación fundamental y con la comultiplicación Δ definida arriba. La otra posible solución, $K_-(u) = U^{-1}(u)$, es decir $\xi_\pm \to \mathrm{i}\infty$ en (3.19), da el signo opuesto para el término de frontera; el hamiltoniano correspondiente resulta entonces invariante en la misma representación, sólo que utilizando la comultiplicación Δ' definida por

$$\Delta' = \sigma \circ \Delta, \tag{3.27}$$

donde $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x$, siendo x e y dos elementos cualesquiera del álgebra.

Merece la pena destacar de nuevo la importancia de los términos de frontera en la conmutatividad (3.25) para una cadena finita. En el caso de condiciones periódicas, no existe dicha simetría. Sólo es posible recuperarla (en concreto bajo el álgebra mayor $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$, con $-1 < q < 0$) si se toma el límite termodinámico $L \to \infty$ (Davies et al. 1993).

3.2.1 Soluciones constantes.

Hasta ahora hemos estado considerando soluciones no constantes para las matrices $K_\pm(u)$, es decir, con dependencia no trivial en el parámetro espectral u. Es más, en las ecuaciones (3.8), (3.9), se supone que son matrices simétricas $K_\pm^t(u) = K_\pm(u)$. En este apartado se da la interpretación que poseen las soluciones diagonales constantes (independientes del parámetro espectral u) para las matrices $K_\pm$ dentro de la teoría de álgebras cuánticas. Aunque nos centramos en el ejemplo de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ en la representación fundamental, creemos que esta interpretación puede extenderse a otras representaciones (ver capítulo 3 para el caso de las nilpotentes) y otras álgebras cuánticas.

Las consideraciones de la sección anterior dependían fuertemente de las simetrías de la matriz $R(u)$. La expresión que por ejemplo se consideraba allí para dicha matriz en el caso de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$, estaba en la llamada gradación principal del álgebra afín. Si pasamos a la gradación homogénea[2], la $R(u)$ correspondiente satisface simetrías más débiles[3]. Si se quiere plantear el modelo estadístico de cadena abierta utilizando dicha matriz, es necesario plantear unas ecuaciones de reflexión distintas, que en particular generalizan las expuestas más arriba En cualquier caso (independientemente del "origen" de la matriz $R(u)$ menos simétrica) estas nuevas ecuaciones de reflexión permiten construir modelos de cadena abierta asociados a matrices con menos simetrías que las exigidas en la sección anterior. Seguiremos para este fin la discusión expuesta en Mezincescu y Nepomechie 1991a. Retomando la relación entre la $R(u)$ en las gradaciones principal y homogénea, las nuevas ecuaciones de reflexión permanecen invariantes bajo la transformación que lleva de una matriz $R(u)$ a otra. Gracias a esto, el hamiltoniano que se deduce resulta el mismo en ambos gauges. Sin embargo, las matrices $K_\pm$ correspondientes no se relacionan entre sí como sería de esperar bajo un cambio de base. En particular, lo que se muestra a continuación es que, si comenzamos con las matrices $K_\pm(u)$ que proporcionaban simetría bajo $\mathcal{U}_q(sl(2))$ para la cadena construida con la matriz $R(u)$ en el gauge principal, las matrices asociadas mediante este cambio que preserva las ecuaciones de reflexión, son soluciones constantes de dichas ecuaciones, con una interpretación clara en el contexto del álgebra cuántica. Concretamente, mientras K_- se convierte en la identidad, K_+ deviene q^{-H}. Este último elemento es el que permite definir invariantes de nudos a partir de las representaciones del grupo de trenzas que proporciona la matriz R de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ (Turaev 1988, Reshetikhin 1987b).

Así pues, consideremos matrices $R(u)$ que, aparte de satisfacer la condición de regularidad, presenten las siguientes simetrías

$$\begin{array}{rl}
\text{Unitariedad} & R(u)R(-u) = \zeta(u)\,\mathbf{1}\ , \\
\text{Simetría PT} & \mathcal{P}R(u)\mathcal{P} = R^{t_{12}}(u)\ , \\
\text{Cruce} & \left(\left((R(u)^{t_2})^{-1}\right)^{t_2}\right)^{-1} = \frac{\zeta(u+\eta)}{\zeta(u+2\eta)}\ \overset{2}{M}\ R(u+2\eta)\ \overset{2}{M}{}^{-1}\ , \\
\text{Twist} & [R(u), M\otimes M] = 0\ .
\end{array}$$

En las simetrías que aquí hemos llamado de Cruce y Twist, M es una matriz simétrica $M^t = M$. Notar que esta segunda simetría es una ecuación exactamente como la que satisface una matriz de twist (3.1).

Las ecuaciones que aseguran que en estas condiciones (3.10) define un modelo integrable de cadena abierta, son

$$\begin{aligned}
&R_{12}(u_1-u_2)\ \overset{1}{K}_-\ (u_1)R_{12}^{t_{12}}(u_1+u_2)\ \overset{2}{K}_-\ (u_2) = \\
&\quad = \overset{2}{K}_-\ (u_2)R_{12}(u_1+u_2)\ \overset{1}{K}_-\ (u_1)R_{12}^{t_{12}}(u_1-u_2),
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$R_{12}(-u_1+u_2)\ \overset{1}{K}{}^{t_1}{}_+\ (u_1)\ \overset{1}{M}{}^{-1}\ R_{21}(-u_1-u_2-2\eta)\ \overset{1}{M}\overset{2}{K}{}^{t_2}{}_+\ (u_2) =$$

[2]Mediante una transformación gauge diagonal.

[3]Véanse por ejemplo Bazhanov 1986 y Jimbo 1986b.

$$= \overset{2}{K}{}^{t_2}{}_{+}(u_2) \overset{1}{M} R_{12}(-u_1 - u_2 - 2\eta) \overset{1}{M}{}^{-1} \overset{1}{K}{}^{t_1}{}_{+}(u_1) R_{21}(-u_1 + u_2). \tag{3.29}$$

Notar que si $K_-(u)$ es solución de (3.28) entonces

$$K_+(u) = K_-^t(-u - \eta)M \tag{3.30}$$

resuelve (3.29). Una solución de las ecuaciones (3.28) y (3.29) está dada por

$$\begin{aligned} K_-(u) &= \mathbf{1} \\ K_+(u) &= M, \end{aligned} \tag{3.31}$$

de manera que aquí las ecuaciones de reflexión (3.28), (3.29) no expresan más que dos de las simetrías de la matriz $R(u)$: la conmutatividad $\left[\check{R}(u), \check{R}(v)\right] = 0$, y (para $u_1 = u_2$) la simetría de Twist, respectivamente.

$$\check{R}(u) \equiv \mathcal{P}R(u) \tag{3.32}$$

es la matriz que denominaremos "trenza" en lo sucesivo.

La transformación gauge adecuada para el ejemplo que vamos a comentar (ver el capítulo 3 para el caso nilpotente), será[4] (Sogo et al. 1983; Mezincescu y Nepomechie 1991a)

$$B(u) = \begin{pmatrix} e^{\mu(n-1)u} & & & & \\ & e^{\mu(n-3)u} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{-\mu(n-3)u} & \\ & & & & e^{-\mu(n-1)u} \end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

que satisface las propiedades

$$\begin{aligned} B(0) &= \mathbf{1}, \\ B(u)B(-u) &= \mathbf{1}, \\ \overset{1}{B}(u) R_{12}(v) \overset{1}{B}(-u) &= \overset{2}{B}(-u) R_{12}(v) \overset{2}{B}(u), \end{aligned}$$

gracias a las cuales se ve fácilmente que la matriz $R(u)$ transformada

$$\widetilde{R}_{12}(u - v) \equiv \overset{1}{B}(u) \overset{2}{B}(v) R_{12}(u - v) \overset{1}{B}(-u) \overset{2}{B}(-v) \tag{3.34}$$

sigue satisfaciendo YB. Bajo este cambio, las ecuaciones de reflexión y las simetrías para $\widetilde{R}(u)$ se transforman covariantemente si las matrices $K_\pm(u)$ pasan a las

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_-(u) &= B(u)K_-(u)B(u), \\ \widetilde{K}_+^t(u) &= B(-u)K_+^t(u)B(-u), \end{aligned} \tag{3.35}$$

[4]Para un espacio auxiliar de dimensión n.

mientras que

$$\widetilde{M} = B(\eta)MB(\eta). \tag{3.36}$$

Nótese que salvo $R(u)$, el resto de las matrices no se transforman como lo harían bajo un verdadero cambio de base. Sin embargo, la cadena abierta definida a partir de las matrices transformadas posee el mismo hamiltoniano que la cadena original; podemos entonces plantearnos la búsqueda de cadenas abiertas e invariantes bajo álgebras cuánticas formulando el problema directamente para las matrices transformadas y con las nuevas (más débiles) simetrías. En tal caso todavía existen soluciones diagonales no constantes para las matrices $K_\pm(u)$, sólo que ya no conducen a cadenas con simetría de grupo cuántico.

Modelo 6V.

Si fijamos en (3.33) $n = 2$, $\mu = -\mathrm{i}/2$, la matriz que se obtiene a partir de (3.3) es

$$\widetilde{R}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(u+\gamma) & & & \\ & \mathrm{sen}(u) & e^{-\mathrm{i}u}\mathrm{sen}(\gamma) & \\ & e^{\mathrm{i}u}\mathrm{sen}(\gamma) & \mathrm{sen}(u) & \\ & & & \mathrm{sen}(u+\gamma) \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

La matriz trenza (3.32) asociada resulta poder escribirse

$$\tilde{\check{R}}(u) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}u}\check{R} - e^{-\mathrm{i}u}\check{R}^{-1}), \tag{3.38}$$

donde

$$\check{R} \equiv \begin{pmatrix} q & & & \\ & q-q^{-1} & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & q \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

es la matriz $\check{R}$ para $\mathcal{U}_q(sl(2))$ en la representación fundamental (Jimbo 1985, 1986a), con

$$q \equiv e^{\mathrm{i}\gamma}. \tag{3.40}$$

En general, dada una solución $\check{R}$ de la YB independiente de parámetro espectral, es posible construir una representación π de los generadores $\{\sigma_i\}_i^{n-1}$ del grupo de trenzas con n cabos B_n definiendo

$$\pi(\sigma_i) = \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes \check{R}_i \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}, \tag{3.41}$$

donde $\check{R}_i$ actúa sobre las copias $i, i+1$ del espacio V en $V^{\otimes n}$. Se cumplen

$$\check{R}_i\check{R}_{i\pm1}\check{R}_i = \check{R}_{i\pm1}\check{R}_i\check{R}_{\pm1}, \tag{3.42}$$

$$\check{R}_i\check{R}_j = \check{R}_j\check{R}_i \quad |i-j| \geq 2. \tag{3.43}$$

El álgebra de Hecke[5] $H_n(q^2)$ generada por (3.39) queda definida a través de la relación adicional

$$\check{R}_i^2 = (q - q^{-1})\check{R}_i + \mathbf{1}. \tag{3.44}$$

(3.38) está asimismo en el Hecke. Se dice de $\check{R}(u)$ que es la baxterización de $\check{R}$ (3.39) (Jones 1991) en el sentido de que proporciona una solución de la ecuación de YB dependiente del parámetro espectral u a partir de una solución (3.39) de la ecuación independiente de parámetro espectral, que no es más que (3.42).

A la vista de (3.38) se satisfacen las propiedades de simetría consideradas en la sección anterior con $2\eta = \mathrm{i}\gamma$ y

$$M = \begin{pmatrix} q^{-1} & \\ & q \end{pmatrix} = q^{-H}, \tag{3.45}$$

siendo H el generador de Cartan de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ en la representación fundamental.

De hecho aquí se tiene una propiedad más fuerte que la simetría de Cruce vista más arriba, llamada Unitariedad de Cruce:

$$\widetilde{R}(u) = \overset{1}{\mathcal{V}}\, \widetilde{R}^{t_2}(-u-\gamma)\, \overset{1}{\mathcal{V}}{}^{-1}, \tag{3.46}$$

donde

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} & -q^{-1/2} \\ q^{1/2} & \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

verifica $\mathcal{V}^2 = -\mathbf{1}$, no siendo M más que $M = \mathcal{V}^t\mathcal{V}$. La matriz $\mathcal{V}^t$ es de hecho el tensor invariante q–deformado ϵ_q, asociado a la representación unidimensional en el producto $V^{1/2} \otimes V^{1/2}$, siendo $V^{1/2}$ la fundamental de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ (ver discusiones en Reshetikhin 1987a o Kauffman 1991).

Así pues, podemos tomar como soluciones para las $K_\pm(u)$ las prescritas en (3.31). La transformación (3.33) que estamos usando las relaciona precisamente con la solución dependiente de parámetro espectral $K_-(u) = U(u)$ y la $K_+(u)$ asociada; en ambos casos el hamiltoniano de cadena abierta que se obtiene es el (3.26), invariante $\mathcal{U}_q(sl(2))$ en la representación fundamental.

M satisface una serie de propiedades con la matriz $\check{R}$ de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ (3.39):

$$\mathrm{Tr}_2\left(\overset{2}{M}\, \check{R}_{12}\right) = \alpha\beta\mathbf{1}, \tag{3.48}$$

$$\mathrm{Tr}_2\left(\overset{2}{M}\, \check{R}_{12}^{-1}\right) = \alpha^{-1}\beta\mathbf{1}, \tag{3.49}$$

con $\alpha = q^2$, $\beta = 1$; también se cumple la simetría de Twist[6]. Las ecuaciones, (3.48), (3.49), más la simetría de Twist, son las condiciones de Turaev (Turaev 1988) para definir un sistema

[5] Normalmente se asocia $H_n(q)$ a la relación $\check{R}_i^2 = (1-q)\check{R}_i + q$.

[6] De hecho es posible probar (Reshetikhin 1987b, Lee 1990, Zhang et al. 1991) para $\mathcal{U}_q(\mathcal{G})$ con $\mathcal{G}$ cualquier álgebra de Lie simple, que el operador $C \equiv \mathrm{Tr}_2((\mathbf{1} \otimes q^{-2h_\rho})\check{R}_{12})$ es un casimir, siendo h_ρ el generador de Cartan asociado a la semisuma de las raíces positivas ρ.

de YB extendido con el que construir invariantes de nudos. En general, si para una solución $\check{R}$ de la YB independiente de parámetro espectral, encontramos una matriz diagonal M y unos α, β tales que se satisfagan (3.48), (3.49), más la versión de Twist independiente de u, entonces es posible probar que el funcional dado por

$$T(\xi) = \alpha^{-w(\xi)}\beta^{-n}\mathrm{Tr}(M^{\otimes n}\pi(\xi)) \tag{3.50}$$

es invariante bajo movimientos de Markov para cualquier palabra $\xi \in B_n$. $w(\xi)$ queda definido por

$$w(\sigma_i) = -w(\sigma_i^{-1}) = 1,$$
$$w(\xi\xi') = w(\xi) + w(\xi')$$

A la vista de este ejemplo, las soluciones constantes para las matrices $K_{\pm}(u)$ asociadas a cadenas invariantes bajo el grupo cuántico no proporcionan sino el elemento diagonal M que forma junto a $\check{R}$ el sistema de YB extendido de Turaev. Esencialmente, M es la representación de un cierto elemento (con inverso) $\mathcal{U}$, siempre definible en el álgebra cuántica en términos de la matriz R universal y de la antípoda S, y que satisface

$$\mathcal{U}\; g\, \mathcal{U}^{-1} = S^2(g) \tag{3.51}$$

para todo elemento g en el álgebra. $\mathcal{U}$ desempeña un papel destacado en el contexto de las llamadas "ribbon Hopf algebras" de Reshetikhin y Turaev 1990, introducidas con objeto de obtener generalizaciones del invariante de Jones a grafos en $\mathbf{R}^3$.

Las ecuaciones de reflexión no expresan en este gauge sino las simetrías de Conmutatividad y Twist de la matriz $R(u)$. Por otro lado, estas soluciones para las matrices $K_{\pm}(u)$ se relacionan mediante una transformación diagonal (gauge) que preserva las ecuaciones de reflexión, con las matrices dependientes de parámetro espectral que proporcionan invariancia bajo el álgebra cuántica. Una pregunta natural en este contexto sería buscar la interpretación de estas $K_{\pm}(u)$ dentro de la teoría de las álgebras cuánticas afines (ACA) de nivel cero. Sin embargo, la forma manifiestamente no afín en la dependencia del parámetro espectral u de las ecuaciones de reflexión (3.8), (3.9) y en la transformación (3.35) parecen dificultar dicha interpretación, aún cuando precisamente en la definición de las ACA aparecen ecuaciones análogas a las (3.8), (3.9) (Reshetikhin y Semenov–Tian–Shansky 1990, Frenkel y Reshetikhin 1992) y es posible construir elementos centrales (Gould y Zhang 1993) formalmente muy similares a la matriz de transferencia para cadena abierta (3.10). Ver un comentario relacionado al final del siguiente capítulo.

En el capítulo 3, se estudia un análogo del ejemplo que se acaba de ver, esta vez referido a un modelo de fermiones libres que aparece en el contexto de las representaciones no restringidas de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ de tipo nilpotente. Son representaciones que únicamente existen cuando el parámetro de deformación q es una raíz de la unidad; veremos el reflejo de esta característica también en las matrices de reflexión $K_{\pm}(u)$.

Finalmente, mencionemos que las soluciones constantes a las ecuaciones de reflexión encuentran asimismo interpretaciones en otros contextos, como por ejemplo la definición de álgebras de tipo cuadrático (Kulish y Sklyanin 1992) o la construcción de invariantes de nudos en toros sólidos (Schwiebert 1992).

Estos comentarios sugieren posibles medios para elucidar completamente el significado algebraico de las matrices de reflexión diagonales $K_{\pm}(u)$.

Capítulo 4

Cadenas abiertas invariantes $\mathcal{U}_q(sl(2))$

Según se comentó en la Introducción, la búsqueda de sistemas realistas que posean un grupo cuántico como simetría supone de forma muy natural construir cadenas unidimensionales de espines en las que se satisfaga una invariancia de dicho tipo. En el capítulo anterior, se observó que ésta se puede conseguir mediante la imposición de condiciones de contorno específicas. El presente capítulo prosigue esta idea y se dedica al estudio de otros modelos de vértices, cuyos hamiltonianos unidimensionales sean efectivamente invariantes bajo transformaciones del grupo cuántico $\mathcal{U}_q(sl(2))$ en representaciones irreducibles (irreps) distintas de la fundamental. Comenzaremos introduciendo un modelo asociado a las irreps nilpotentes de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ en los casos $q^4 = 1$ y $q^3 = 1$, para los que se estudiarán las condiciones bajo las que existe la mencionada invariancia. Dado que este tipo de representaciones sólo existe para el álgebra deformada, la invariancia conseguida y las propiedades que de ella se deriven se pueden entender como propiedades genuinamente debidas a la deformación "cuántica" del álgebra. Como hemos visto, la invariancia exige calcular las matrices $K_\pm(u)$ que resuelven las ecuaciones de reflexión y tomar los límites adecuados. Para $q^4 = 1$ se examinará la interpretación de las $K_\pm(u)$ a la luz del ejemplo del modelo 6V visto en el capítulo anterior. Luego, se harán algunas consideraciones sobre el centralizador en el caso de estas representaciones, con especial hincapié en el ejemplo $q^4 = 1$. Debido a la conmutatividad con el grupo cuántico, el hamiltoniano no es más que un elemento del centralizador. Hasta aquí los resultados que se expongan para cadenas abiertas y el centralizador se basarán esencialmente en los contenidos de la referencia Cuerno et al. 1993a.

La última parte del capítulo abandona las consideraciones de tipo algebraico, para introducir técnicas más propias del Análisis en el estudio de los modelos de vértices que se han estudiado en la primera parte. Presentaremos una aplicación de técnicas de tamaño finito para determinar la extensión central correspondiente a un modelo de tres estados (espín 1) invariante bajo transformaciones en la correspondiente representación regular de $\mathcal{U}_q(sl(2))$. Tras la resolución por Hamer et al. 1987 del modelo XXZ (espín 1/2), no sabemos de ningún otro ejemplo de cálculo analítico de la extensión central en cadenas abiertas, y se presenta aquí por vez primera. El procedimiento consiste en adaptar la técnica introducida por Klümper y Batchelor 1990 y Klümper et al. 1991 (KBP) en modelos de cadena cerrada con twist. El resultado que nosotros obtenemos confirma predicciones numéricas existentes en la literatura, y refuerza la relación entre las matrices $K_{\pm}(u)$ asociadas a cadenas invariantes y un twist dado por la anisotropía. Finaliza el capítulo con unos comentarios sobre la extensión central para las cadenas abiertas nilpotentes.

4.1 Irreps. nilpotentes y modelos de vértices.

En el contexto de las teorías conformes (CFT), es bien conocido que las álgebras cuánticas juegan el papel de una simetría oculta, que subyace al álgebra de fusión (Álvarez–Gaumé et al. 1989, 1990). Por ejemplo, en el caso de un modelo WZW con álgebra $\widehat{su(2)}_k$, siendo k el nivel, los campos primarios ϕ_j están caracterizados por un número j que puede tomar hasta $k+1$ valores distintos (la teoría es racional, RCFT):

$$j = 0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{k}{2}.$$

El álgebra de fusión es análoga a la de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ para la siguiente raíz de la unidad

$$q = e^{\frac{2\pi i}{k+2}}.$$

En tal caso, las representaciones regulares tienen dimensiones hasta $k+1$. La siguiente representación, de dimensión

$$2j + 1 = k + 2 \Rightarrow j = \frac{k+1}{2},$$

resulta tener q–dimensión nula[1], y no aparece en el álgebra de fusión de la teoría racional: es una de las irreps que se hallan en la frontera de la tabla de Kač. Para los modelos minimales $c < 1$ existen representaciones similares. Este tipo de representaciones será el que nos ocupe en las dos primeras secciones del presente capítulo. Las irreps nilpotentes son precisamente aquellas irreducibles de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ para $q^N = 1$, con dimensión[2] N'. Son representaciones con hwv y lwv, y ofrecen la posibilidad de movernos dentro de tal conjunto de representaciones con q–dimensión nula gracias a su dependencia de un parámetro adicional λ que llamaremos nilpotente. Como ya hemos citado varias veces, este tipo de representaciones sólo existe cuando

[1] La q–dimensión de una representación π de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ se define como la traza (Reshetikhin 1987b, Álvarez–Gaumé et al. 1990)

$$D_q(\pi) = \mathrm{Tr}_q(q^H) = [2j+1]_q = \frac{S_{0j}}{S_{00}},$$

donde S es aquí la matriz de transformaciones modulares.

[2] $N' \equiv N$ si N es impar; en caso contrario $N' \equiv N/2$.

q es una raíz de 1, y constituyen un tipo particular de una serie de representaciones que no poseen análogo clásico (es decir, entre las representaciones del álgebra no deformada). Desde el punto de vista de los sistemas estadísticos y sus cadenas asociadas, las representaciones nilpotentes aparecen como generalizaciones integrables de los modelos asociados a $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ para la correspondiente raíz de la unidad, introduciendo nuevos términos acoplados a través del parámetro λ.

Vamos a comenzar introduciendo someramente las representaciones nilpotentes de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ para q raíz de la unidad. La matriz $R(u)$ del modelo de vértices aparece como la solución de la ecuación de interpolación correspondiente en $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$. Daremos las soluciones para los casos con $q^4 = 1$ (dos estados) y $q^3 = 1$ (tres estados).

4.1.1 Álgebra cuántica afín $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ e irreps nilpotentes.

Recordemos brevemente la definición del álgebra cuántica afín $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ (Drinfeld 1986; Jimbo 1986a,b). Está generada por $\{E_i, F_i, K_i\}_0^1$, que satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} &K_i K_j = K_j K_i, \\ &K_i E_j K_i^{-1} = q^{a_{ij}} E_j \quad , \quad K_i F_j K_i^{-1} = q^{-a_{ij}} F_j, \\ &[E_i, F_j] = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

más las relaciones de Serre q–deformadas que no damos aquí (ver referencias); a_{ij} es la matriz de Cartan ampliada

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

La comultiplicación es

$$\begin{aligned} &\Delta(E_i) = E_i \otimes \mathbf{1} + K_i \otimes E_i, \\ &\Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + \mathbf{1} \otimes F_i, \qquad i = 0, 1 \\ &\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i. \end{aligned} \tag{4.3}$$

$\mathcal{U}_q(sl(2))$ no es más que quedarnos con los generadores $E \equiv E_1, F \equiv F_1, K \equiv K_1$. El álgebra tiene un elemento central conocido como el nivel[3], $k = H_0 + H_1$. Si $k = 0$, al álgebra se le da el nombre de álgebra de lazo (loop); es posible construir representaciones de dimensión finita π a partir de otras de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ mediante

$$\begin{aligned} \pi(E_0) &= e^u \pi(F), \qquad \pi(E_1) = e^u \pi(E), \\ \pi(F_0) &= e^{-u} \pi(E), \qquad \pi(F_1) = e^{-u} \pi(F), \\ \pi(K_0) &= \pi(K^{-1}), \qquad \pi(K_1) = \pi(K), \end{aligned}$$

[3] $K_i = q^{H_i}$.

donde $x = e^u$ es el llamado parámetro afín o de lazo. Esta representación es en la llamada gradación (gauge) principal. Dadas dos representaciones π_{λ_j,u_j} $(j = 1,2)$[4] irreducibles, y denotando de manera colectiva $\xi_j = (\lambda_j, u_j)$, y

$$\Delta_{\xi_1,\xi_2} = \pi_{\xi_1} \otimes \pi_{\xi_2}(\Delta), \tag{4.4}$$

la matriz $\check{R}(u) \equiv \mathcal{P}R(u)$ de entrelazado se define a través de las relaciones

$$\check{R}^{\xi_1,\xi_2}(u_1-u_2)\Delta_{\xi_1,\xi_2}(g) = \Delta_{\xi_2,\xi_1}(g)\check{R}^{\xi_1,\xi_2}(u_1-u_2) \quad \forall g \in \mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)}). \tag{4.5}$$

$R(u)$ satisface la ecuación de YB dependiente de parámetro espectral (2.3) (Jimbo 1986b).

En el caso en el que $q^N = 1$ (De Concini y Kač 1990; ver Roche y Arnaudon 1989 para el caso específico de $\mathcal{U}_q(sl(2))$), el álgebra de Hopf $\mathcal{U}_q(sl(2))$ contiene una subálgebra central $\mathcal{Z}_q$ generada por los elementos $E^{N'}, F^{N'}, K^{N'}$. Para una representación π de dimensión d finita, necesariamente se cumplirá que $d \leq N'$, y estará caracterizada por los autovalores de estos elementos centrales, $\xi_\pi(a)$ $\;a \in \mathcal{Z}_q$, que se convierten así en números cuánticos adicionales aparte de los existentes en el caso de q genérico[5]. Aparte de las representaciones llamadas regulares o restringidas, y que son (q–)deformaciones continuas de las irreducibles finito–dimensionales del álgebra no deformada, aparecen representaciones sin análogo clásico, conocidas genéricamente como representaciones no restringidas. Éstas dependen de forma continua de los nuevos números cuánticos mencionados, y se clasifican atendiendo a cuándo alguno de éstos se anula[6]. En concreto, las llamadas representaciones nilpotentes (Berkovich et al. 1992, 1993; Gómez y Sierra 1992b) se caracterizan por ser representaciones de dimensión N' con vectores de pesos máximo y mínimo $\xi_\pi(E^{N'}) = \xi_\pi(F^{N'}) = 0$; el casimir adicional vale genéricamente

$$\xi_\pi(K^{N'}) = \lambda^{N'}, \tag{4.6}$$

donde λ es un número complejo arbitrario. En este sentido son las representaciones más parecidas a las regulares (ya que poseen hwv y lwv), pero introducen un casimir adicional puramente "cuántico". Son irreducibles para valores genéricos de él[7], y en una base $\{e_j\}_0^{N'-1}$ están dadas por

$$\begin{aligned} \pi_\lambda(E)e_j &= d_{j-1}(\lambda)e_{j-1}, \\ \pi_\lambda(F)e_j &= d_j(\lambda)e_{j+1}, \\ \pi_\lambda(K)e_j &= \lambda q^{-2j}e_j, \end{aligned} \tag{4.7}$$

[4] λ_j es alguna etiqueta de la representación, por ejemplo el valor de algun casimir.

[5] A saber, el valor del casimir cuadrático q–deformado $C = FE + (q-q^{-1})^{-2}(qK + q^{-1}K^{-1})$.

[6] Por ejemplo si $\xi_\pi(E), \xi_\pi(F) \neq 0$, la representación no tiene ni vector de peso máximo (hwv) ni vector de peso mínimo (lwv). Son las llamadas cíclicas.

[7] Para ciertos $\lambda = \pm q^m,\; m = 0, 1, \ldots, N'-1$, son completamente reducibles (Gómez y Sierra 1992b; Berkovich et al. 1993); a estos puntos se los conoce como puntos orbifold.

donde ($d_{-1} \equiv 0$)

$$d_j^2(\lambda) = [j+1]\frac{\lambda q^{-j} - \lambda^{-1} q^j}{q - q^{-1}}, \quad j = 0, 1, \ldots, N' - 1, \qquad [x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}. \tag{4.8}$$

Si tomamos

$$\lambda = q^{2s}, \tag{4.9}$$

con $s = 2N' + 1$, se recupera la representación regular de espín s para esa raíz de la unidad.

4.1.2 Matrices $R(u)$.

Físicamente tiene interés explorar los modelos integrables dados por la matriz R interpoladora entre estos nuevos tipos de representaciones, buscando el significado físico de los nuevos parámetros asociados a ellas. Por ejemplo, la matriz R correspondiente a las representaciones cíclicas de una cierta extensión central $\widetilde{\mathcal{U}}_q(\widehat{sl(2)})$ de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ resulta ser el elemento a partir del cual se construyen los pesos de Boltzmann del modelo de Potts Quiral (Bazhanov y Stroganov 1990; Date et al. 1990,1991). Nosotros vamos a seguir un programa análogo, pero aplicado a las representaciones nilpotentes y en el caso de cadena abierta. El de cadena cerrada con N genérico se estudia con detalle en Berkovich et al. 1993.

(4.5) supone cuatro ecuaciones que es posible resolver por un procedimiento recursivo para N genérico. Aquí damos las soluciones para los casos $q^4 = 1$ y $q^3 = 1$, que suponen modelos de vértices con dos ($N' = 2$) y tres ($N' = 3$) estados respectivamente. Son los casos más sencillos de las correspondientes familias de modelos nilpotentes con N par o impar respectivamente, cuya física es distinta.

Caso $q^4 = 1$:

La matriz R solución de la ecuación de entrelazado (4.5), donde $\lambda_j \equiv e^{\mathrm{i}\psi_j}$, $j = 1, 2$, son ahora los parámetros nilpotentes (caracterizan las irreducibles entre las que R interpola, y los escribimos aquí como subíndices de ésta), es (Murakami 1992, Ruiz–Altaba 1992)

$$R_{\lambda_1,\lambda_2}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(u+\frac{\mathrm{i}}{2}(\psi_1+\psi_2)) & & & \\ & \mathrm{sh}(u+\frac{\mathrm{i}}{2}(\psi_1-\psi_2)) & (\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathrm{sh}(\mathrm{i}\psi_1)\ \mathrm{sh}(\mathrm{i}\psi_2))^{1/2} & \\ & (\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mathrm{sh}(\mathrm{i}\psi_1)\ \mathrm{sh}(\mathrm{i}\psi_2))^{1/2} & \mathrm{sh}(u+\frac{\mathrm{i}}{2}(\psi_2-\psi_1)) & \\ & & & \mathrm{sh}(-u+\frac{\mathrm{i}}{2}(\psi_1+\psi_2)) \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Dos simetrías de esta matriz son

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}R_{\lambda_1,\lambda_2}\mathcal{P} = R_{\lambda_2,\lambda_1}(u), \\ &\check{R}_{\lambda_1,\lambda_2}(u)\check{R}_{\lambda_2,\lambda_1}(-u) = \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\ \mathrm{sh}(u + \frac{\mathrm{i}}{2}(\psi_1+\psi_2))\ \mathrm{sh}(-u + \frac{\mathrm{i}}{2}(\psi_1+\psi_2))\ \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Si tomamos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, se obtiene

$$R_\lambda(u) = \begin{pmatrix} \sin(u+\psi) & & & \\ & \sin u & \sin\psi & \\ & \sin\psi & \sin u & \\ & & & -\sin(u-\psi) \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

que satisface la condición de regularidad, así como las simetrías P, T, de Unitariedad y de Cruce, mencionadas al comienzo del anterior capítulo. El aspecto más relevante de esta matriz es que, a diferencia del caso 6V visto con anterioridad, los elementos

$$R_\lambda(u)^{00}_{00} \neq R_\lambda(u)^{11}_{11},$$

para valores genéricos de ψ. Sólo en el límite de representación regular (espín $s = 1/2$ en (4.9)) es $\lambda = q = e^{\mathrm{i}\pi/2}$ y se recupera la igualdad $R_{6V}(u)^{00}_{00} = R_{6V}(u)^{11}_{11}$. Intuitivamente podemos pensar en esta ruptura de simetría debida a ψ como la introducción de un campo externo. Esta afirmación encuentra un significado preciso por ejemplo en la expresión del hamiltoniano que se estudia más abajo, y se mantiene incluso en la generalización elíptica de esta matriz $R(u)$. Véase la introducción del capítulo 4.

Caso $q^3 = 1$:

La solución de la ecuación de entrelazado correspondiente a representaciones nilpotentes λ_1, λ_2 se puede leer en Berkovich et al. 1992. Aquí vamos a dar por sencillez y para referencia posterior la matriz $R_\lambda(u) \equiv R_{\lambda,\lambda}(u)$, correspondiente al caso $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$; es una matriz simétrica con un total de 19 entradas no nulas[8]

$$R_\lambda(u) = \begin{pmatrix} p & & & & & & & & \\ & a & & c & & & & & \\ & & b & & d & & e & & \\ & c & & a & & & & & \\ & & d & & f & & d & & \\ & & & & & \hat{a} & & \hat{c} & \\ & & e & & d & & b & & \\ & & & & & \hat{c} & & \hat{a} & \\ & & & & & & & & \hat{p} \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{sh}(u+\mathrm{i}\psi)\,\mathrm{sh}(u+\mathrm{i}\psi-\mathrm{i}\gamma), & \hat{p} &= \mathrm{sh}(-u+\mathrm{i}\psi)\,\mathrm{sh}(-u+\mathrm{i}\psi-\mathrm{i}\gamma), \\ c &= \mathrm{sh}(\mathrm{i}\psi)\,\mathrm{sh}(u+\mathrm{i}\psi-\mathrm{i}\gamma), & \hat{c} &= \mathrm{sh}(\mathrm{i}\psi-u)\,\mathrm{sh}(\mathrm{i}\psi-\mathrm{i}\gamma), \\ a &= \mathrm{sh}(u)\,\mathrm{sh}(u+\mathrm{i}\psi-\mathrm{i}\gamma), & \hat{a} &= \mathrm{sh}(u)\,\mathrm{sh}(u-\mathrm{i}\psi), \\ e &= \mathrm{sh}(\mathrm{i}\psi)\,\mathrm{sh}(\mathrm{i}\psi-\mathrm{i}\gamma), & b &= \mathrm{sh}(u)\,\mathrm{sh}(u-\mathrm{i}\gamma), \end{aligned}$$

[8] En la literatura se habla frecuentemente de modelos de 19 vértices para designar aquéllos de 3 estados tales que $R(u)^{k,l}_{i,j} \neq 0 \Leftrightarrow i+j = k+l$.

$$f = \mathrm{sh}(u)\,\mathrm{sh}(u+\mathrm{i}\gamma) + \mathrm{sh}(\mathrm{i}\psi)\,\mathrm{sh}(\mathrm{i}\psi - \mathrm{i}\gamma),$$
$$d = [2]^{1/2}\,\mathrm{sh}(u)\,\left(\mathrm{sh}(\mathrm{i}\psi)\,\mathrm{sh}(\mathrm{i}\psi-\mathrm{i}\gamma)\right)^{1/2},$$

donde $q = \epsilon = e^{\mathrm{i}\gamma}$, $\epsilon^3 = 1$ y $\lambda = e^{\mathrm{i}\psi}$. Esta matriz satisface las simetrías:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}R_\lambda(u)\mathcal{P} = (R_\lambda(u))^{t_{12}} = R_\lambda(u),\\
&R_\lambda(0) = -\sin(\psi-\gamma)\sin(\psi)\ \mathbf{1}\otimes\mathbf{1},\\
&R_\lambda(u)R_\lambda(-u) = g(u)\ g(-u)\ \mathbf{1}\otimes\mathbf{1},\\
&(R_\lambda(u))^{t_1}(R_\lambda(-u+\gamma))^{t_1} = \tilde{g}^2(u)\ \mathbf{1}\otimes\mathbf{1},\\
&R_\lambda(u)^{ij}_{kl} = R_{\epsilon\lambda^{-1}}(u)^{\bar{i}\bar{j}}_{\bar{k}\bar{l}}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

donde $\gamma = 2\pi\mathrm{i}/3$, $g(u) = \frac{1}{2}\ \mathrm{sh}(u+\mathrm{i}\psi)\ \mathrm{sh}(u+\mathrm{i}(\psi-\gamma))$, $\tilde{g}(u) = \mathrm{sh}(u)\ \mathrm{sh}(u-\mathrm{i}\gamma)$, $\bar{j} \equiv 2-j, \quad j = 0,1,2$. La última de las (4.13) se suele llamar simetría de conjugación de carga (Wadati et al. 1989); se generaliza a casos de N arbitrario. A semejanza del ejemplo anterior (ver capítulo 2), para valores genéricos de λ tampoco es aquí posible encontrar una matriz $\mathcal{V}$ con la que R_λ satisfaga Unitariedad de Cruce. Finalmente, si tomamos en (4.12) $\lambda = \epsilon^2$ ($s = 1$ en (4.9)) con $\gamma = 2\pi\mathrm{i}/3$ (usar $\epsilon^2 = \epsilon^{-1}$), obtenemos la matriz $R(u)$ del modelo de Zamolodchikov y Fateev 1980 (ver también Mezincescu et al. 1990[9]) con $\eta_{MNR} = 2\pi\mathrm{i}/3$, que no es más que la interpoladora de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ en representación regular de espín 1 con $q^3 = 1$.

4.2 Cadenas abiertas.

En la sección anterior han quedado definidos nuevos modelos de vértices a través de las matrices R correspondientes a representaciones nilpotentes. La integrabilidad en el caso de condiciones de contorno periódicas queda asegurada por la ecuación de YB satisfecha por dicha matriz de pesos de Boltzmann. En la sección que ahora empieza, nuestro objetivo será determinar bajo qué condiciones se puede tener un modelo integrable cuyo hamiltoniano sea explícitamente invariante bajo representaciones nilpotentes λ del álgebra cuántica. En tal caso el espectro se estructurará con arreglo a estas simetrías carentes de análogo clásico, y serían de esperar propiedades nuevas.

4.2.1 Matrices de reflexión $K_\pm(u)$.

Como vimos en el capítulo anterior, el procedimiento para construir un modelo integrable correspondiente a cadena abierta pasa por calcular las matrices $K_\pm(u)$ solución de las ecuaciones de reflexión (3.8), (3.9) (son las que aquí consideraremos debido a las simetrías de las matrices R de la sección anterior). Antes de exponer los resultados, conviene notar que nuestro interés

[9] En la notación de esta referencia es $q = e^\eta$. Por evitar confusión llamaremos η_{MNR} aquí a su parámetro η.

último radica en llegar a hamiltonianos explícitamente invariantes bajo transformaciones del álgebra cuántica en representaciones nilpotentes, que ya hemos visto que son muy similares a las representaciones regulares. Los resultados conocidos para éstas en la literatura enseñan que los términos de frontera que uno necesita incluir en el hamiltoniano para conseguir la invariancia deseada son proporcionales a la identidad o el operador de espín $\mathcal{S}^z$ actuando en los extremos de la cadena (podrían interpretarse como campos magnéticos). Esto explica que en lo que sigue nos restrinjamos a considerar soluciones diagonales para las matrices $K_\pm(u)$, aun cuando en principio puedan existir soluciones más generales para ellas dada una matriz $R(u)$ que sea solución de YB. Estas otras soluciones originan términos de frontera diferentes, compatibles con la integrabilidad, pero que no suponen la invariancia buscada para los hamiltonianos correspondientes. De hecho, en el caso $q^4 = 1$ las soluciones diagonales son las únicas que existen para las ecuaciones de reflexión.

Curiosamente, la misma relación entre matrices $K_\pm(u)$ diagonales e invariancia bajo el álgebra cuántica no afín se da en el caso del hamiltoniano XY con campo magnético, simétrico bajo transformaciones $CH_q(2)$, en representaciones que no son tipo hwv. Véase el capítulo 4.

Por último, las matrices $K_\pm(u)$ que se calculan a continuación corresponden, naturalmente, a matrices R regulares, en las que necesariamente se toma $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, de forma que $R_\lambda(u) \propto \mathcal{P}$.

Caso $q^4 = 1$:

La solución diagonal más general coincide con la correspondiente al modelo 6V, pero con anisotropía fijada al valor que indica la raíz de la unidad, $\gamma = \pi/2$, a saber:

$$K_-(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(u+\alpha_-) & \\ & -\mathrm{sh}(u-\alpha_-) \end{pmatrix} \quad , \quad K_+(u) = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\ \mathrm{ch}(u+\alpha_+) & \\ & \mathrm{i}\ \mathrm{ch}(u-\alpha_+) \end{pmatrix} . \tag{4.14}$$

$\alpha_\pm$ son números complejos arbitrarios. Éstas son las únicas soluciones de las ecuaciones de reflexión para la matriz $R(u)$ considerada. Notar que $\mathrm{Tr}K_+(0) = 0 \ \ \forall \alpha_+$.

La transformación gauge (3.33) conduce ahora a la solución constante (3.45) con $q = \mathrm{i}$, de forma que

$$\mathrm{Tr}M = 0. \tag{4.15}$$

(4.15) es aquí una consecuencia de tratar con representaciones de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ para q raíz de la unidad; así pues, éste es aquí el significado de (3.16). El valor de esta traza supone un problema de denominadores nulos en los respectivos invariantes de nudos, lo cual exige la introducción de algún tipo de regularización[10]. Respecto a $\check{\tilde{R}}$, también se escribe ahora de forma baxterizada

$$\widetilde{\check{R}}_\lambda(u) = \frac{1}{2}(e^u \check{R}_\lambda - e^{-u}\check{R}_\lambda^{-1}), \tag{4.16}$$

[10] Este problema ha sido estudiado por distintos autores: Lee 1990, Deguchi y Akutsu 1990, Kauffman y Saleur 1991.

donde

$$\check{R}_\lambda \equiv \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda-\lambda^{-1} & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & -\lambda^{-1} \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

(3.48), (3.49) se cumplen para $\alpha = \lambda^{-1}$, $\beta = 1$. Sin embargo, aquí no se tiene Unitariedad de Cruce (3.46), un hecho ligado a que en la descomposición del producto tensorial $V_\lambda \otimes V_\lambda$, con V_λ la representación nilpotente λ para $q^4 = 1$, no aparece la representación identidad (unidimensional) para valores genéricos de λ. Ver la sección sobre el centralizador en este mismo capítulo.

Caso $q^3 = 1$:

Aquí resulta conveniente resolver (3.8) tras el cambio de base expresado por la matriz (Mezincescu y Nepomechie 1991b)

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T^2 = \mathbf{1}, \\ R(u) &\longrightarrow \tilde{R}(u) = (T\otimes T)R(u)(T\otimes T), \\ K_-(u) &\longrightarrow \widetilde{K}_-(u) = TK_-(u)T. \end{aligned}$$

Utilizando la condición $K_-(0) = \mathbf{1}$ y el hecho de que (3.8) determina la solución salvo multiplicación por una función escalar de u, se obtiene una serie de ecuaciones para los dos elementos independientes de la matriz $K_-(u)$, evaluados en argumentos $u_1 \pm u_2$. Éstas se resuelven tomando derivadas respecto a u_1 ó u_2 en $u_{1,2} = 0$ y exigiendo consistencia de las ecuaciones obtenidas (ver Zamolodchikov y Fateev 1980). El resultado es (Cuerno et al. 1993a)

$$K_-(u) = \frac{1}{\mathrm{sh}(\zeta_-)\,\mathrm{sh}(\zeta_- - \gamma)} \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(u+\zeta_-)\,\mathrm{sh}(u+\zeta_- -\gamma) & & \\ & -\mathrm{sh}(u-\zeta_-)\mathrm{sh}(u+\zeta_- -\gamma) & \\ & & \mathrm{sh}(u-\zeta_-)\mathrm{sh}(u-\zeta_- +\gamma) \end{pmatrix}, \tag{4.18}$$

$$K_+(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(u+\gamma-\zeta_+)\mathrm{sh}(u-\zeta_+ -\gamma) & & \\ & -\mathrm{sh}(u+\gamma+\zeta_+)\mathrm{sh}(u-\zeta_+ -\gamma) & \\ & & \mathrm{sh}(u+\zeta_+)\mathrm{sh}(u+\zeta_+ +\gamma) \end{pmatrix}.$$

donde $\gamma = 2\pi \mathrm{i}/3$, y $\zeta_\pm$ son números complejos arbitrarios. Estas matrices coinciden con las de Mezincescu et al. 1990 para el modelo de espín uno de Zamolodchikov–Fateev si en las últimas tomamos $\eta_{MNR} = 2\pi\mathrm{i}/3$. Vuelve a ocurrir aquí que $\mathrm{Tr}K_+(0) = 0 \;\; \forall \zeta_+$.

Es interesante notar que las soluciones para las matrices $K_\pm(u)$ de las cadenas nilpotentes no dependen del parámetro λ, sino que son únicamente sensibles a la raíz de la unidad con que se esté trabajando en cada caso.

4.2.2 Hamiltonianos de cadena abierta.

La particularidad de la traza nula que hemos observado en las soluciones para las matrices $K_+(u)$ hace que necesitemos recurrir a la segunda derivada de la matriz de transferencia de cadena abierta para definir el hamiltoniano asociado (ver capítulo 2).

Caso $q^4 = 1$:

Normalizando la matriz $R_\lambda(u)$ (4.10) por el factor $\lambda^2 - 1$ de forma que satisfaga (3.12), y aplicando (2.18) se obtiene el hamiltoniano

$$H_{1/2}(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda^{-1}} \sum_{j=1}^{L-1} \left\{ \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2} (\sigma_j^z + \sigma_{j+1}^z) + \frac{\lambda - \lambda^{-1}}{2} (\sigma_1^z - \sigma_L^z) \right\}. \tag{4.19}$$

En lo anterior se ha tomado el límite $\alpha_\pm \to \infty$ en las matrices $K_\pm(u)$ correspondientes, de manera que (4.19) es invariante bajo transformaciones de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ $q^4 = 1$ en representación nilpotente λ (4.7). Como en el caso del 6V, si se invierte el signo del término de frontera, el hamiltoniano es invariante con la comultiplicación Δ', y corresponde a haber tomado $\alpha_\pm \to -\infty$. Esto se debe a que naturalmente aquí las matrices $K_\pm(u)$ también se escriben en términos de una matriz $U(u)$ y de su inversa.

(4.19) es un modelo XX unidimensional en presencia de campo magnético externo; utilizando la transformación de Jordan–Wigner (ver capítulo 5) dicho hamiltoniano se expresa como una forma cuadrática en operadores de creación y aniquilación de fermiones, y supone un modelo de fermiones libres. Tendremos ocasión de volver sobre él en los capítulos siguientes.

Caso $q^3 = 1$:

También aquí hemos de recurrir a (2.18) para definir el hamiltoniano de cadena abierta. Con las matrices (4.18) y la (4.12) debidamente normalizada se obtiene:

$$\begin{aligned}
H_1(\lambda) &= \frac{\epsilon - \epsilon^{-1}}{\omega^2(\lambda)} \sum_{i=1}^{L-1} \left\{ \frac{\lambda\epsilon + \lambda^{-1}\epsilon^{-1}}{2} (S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y) - \right. \\
&- \frac{1}{2} S_i^z S_{i+1}^z - (S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y)^2 + \frac{1}{2} (S_i^z S_{i+1}^z)^2 - \frac{3}{2} ((S_i^z)^2 + (S_{i+1}^z)^2) \\
&+ \left(\frac{\lambda\epsilon + \lambda^{-1}\epsilon^{-1}}{2} + \omega(\lambda) \right) [(S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y) S_i^z S_{i+1}^z + \leftrightarrow] \\
&- \left. \frac{\lambda\epsilon - \lambda^{-1}\epsilon^{-1}}{2(\epsilon - \epsilon^{-1})} (S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y)(S_i^z + S_{i+1}^z) + \frac{\lambda^2\epsilon^{-1} - \lambda^{-2}\epsilon}{2(\epsilon - \epsilon^{-1})} (S_i^z + S_{i+1}^z) \right\} \\
&+ T_1(\zeta_-) + T_L(\zeta_+),
\end{aligned} \tag{4.20}$$

donde $\omega(\lambda) = \sqrt{(\lambda - \lambda^{-1})(\lambda\epsilon - \lambda^{-1}\epsilon)}$, $\leftrightarrow$ supone intercambiar los factores y $\vec{S}_j$ son las matrices de espín 1 actuando en la posición j–ésima de la cadena:

$$S^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^y = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^z = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}. \qquad (4.21)$$

$T_1(\zeta_-)$, $T_L(\zeta_+)$ son los términos de frontera, cuya forma más general es

$$\begin{aligned} T_1(\zeta_-) &= \frac{1}{2}\left\{(\coth(\zeta_-) + \coth(\zeta_- - \gamma))S_1^z + (\coth(\zeta_-) - \coth(\zeta_- - \gamma))(S_1^z)^2\right\}, \\ T_L(\zeta_+) &= -\frac{1}{2}\left\{(\coth(\zeta_+) + \coth(\zeta_+ - \gamma))S_L^z + (\coth(\zeta_+) - \coth(\zeta_+ - \gamma))(S_L^z)^2\right\}. \end{aligned}$$

En el límite $\zeta_\pm \to +\infty$ quedan

$$\begin{aligned} T_1(\infty) &= S_1^z, \\ T_L(\infty) &= -S_L^z. \end{aligned}$$

con lo que (4.20) resulta invariante en la nilpotente λ de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ $q^3 = 1$ (4.7). Si hacemos $\lambda = q^2$, (4.20) es la cadena abierta correspondiente al modelo de Zamolodchikov–Fateev, invariante $\mathcal{U}_q(sl(2))$ en representación regular de espín 1 para $q^3 = 1$ (dicho hamiltoniano no es sino una combinación lineal de la comultiplicación del casimir cuadrático q–deformado y del cuadrado de éste, Batchelor et al. 1990).

Notar que, aunque en los ejemplos que se acaban de ver los términos de volumen de los hamiltonianos conmutan con los operadores $\mathcal{S}^z$ respectivos, de espín total según el eje z:

$$\left[H_{1/2}(\lambda), \sum_{j=1}^{L} \sigma_j^z\right] = 0, \qquad \left[H_1(\lambda), \sum_{j=1}^{L} S_j^z\right] = 0, \qquad (4.22)$$

con lo que los autoestados tendrán un valor bien definido para $\mathcal{S}^z$, no conmutan con los términos de frontera que proporcionan la invariancia buscada. Lo mismo ocurrirá en el capítulo siguiente cuando estudiemos el modelo unidimensional XY, en el que ni siquiera existirá el análogo de (4.22).

4.2.3 Centralizador.

La consecuencia interesante de la invariancia de un hamiltoniano bajo un álgebra cuántica es que muchas propiedades de su espectro se pueden derivar directamente de la teoría de representaciones de ésta. Así por ejemplo, para el hamiltoniano de cadena abierta dado por la matriz $R(u)$ 6V y las matrices de reflexión (3.21), sabemos que cada autovalor de la energía está asociado con una cierta irrep de espín j de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ y que tendrá una degeneración $2j + 1$. Dado que además el espacio de estados del sistema lo construimos colocando una copia de la representación fundamental $V_{1/2}$ de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ en cada sitio de la cadena de longitud L, las diferentes representaciones que pueden aparecer en el espectro serán las que se obtengan en la descomposión $V_{1/2}^{\otimes L}$. Una manera de conocer esta descomposición resulta ser el estudio de las representaciones del centralizador.

Dada una representación V^s del álgebra cuántica $\mathcal{U}_q(sl(2))$, se define el centralizador $C_L^s(q)$ como el álgebra de aplicaciones $g : \bigotimes^L V^s \longrightarrow \bigotimes^L V^s$ tales que conmutan con la acción del grupo cuántico sobre $\bigotimes^L V^s$. Consideremos ahora los elementos

$$g_i = \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes \check{R}_i^{s,s} \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}, \quad i = 1, \ldots, L-1, \tag{4.23}$$

donde $\check{R}_i^{s,s}$ es la matriz trenza de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ actuando sobre las copias i e $i{+}1$ del espacio V^s. Por ejemplo, en el caso de la representación fundamental $s = 1/2$, $\check{R}^{1/2,1/2}$ no es más que la matriz (3.39). Ésta tiene sólo dos autovalores, q y $-q^{-1}$, con multiplicidades 3 y 1 respectivamente. De hecho podemos reescribirla como

$$\check{R}^{1/2,1/2} = q\mathcal{P}_1^{1/2,1/2} - q^{-1}\mathcal{P}_0^{1/2,1/2}, \tag{4.24}$$

con $\mathcal{P}_{1,0}^{1/2,1/2}$ los proyectores sobre la representación tridimensional (espín $s = 1$) y unidimensional (espín $s = 0$) respectivamente, en la descomposición

$$V^{1/2} \otimes V^{1/2} = V^1 \oplus V^0. \tag{4.25}$$

$C_L^{1/2}(q)$ está efectivamente generado para q genérico por los elementos (4.23), y de forma análoga ocurre respecto a la fundamental de $\mathcal{U}_q(sl(n))$ con su correspondiente matriz $\check{R}$ (Reshetikhin 1987a). Dado que en todos estos casos se satisfacen las relaciones (3.42), (3.43) además de la relación cuadrática (3.44), concluimos que el centralizador de $\mathcal{U}_q(sl(n))$ es el álgebra de Hecke $H_L(q^2)$. Aún es más, en el caso $\mathcal{U}_q(sl(2))$ $s = 1/2$, se satisface la relación adicional[11]

$$g_i g_{i+1} g_i + g_i g_{i+1} + g_{i+1} g_i + g_i + g_{i+1} + 1 = 0. \tag{4.26}$$

Al álgebra resultante se le conoce como álgebra de Temperley–Lieb–Jones (TLJ) (Jones 1987). Las representaciones del centralizador $C_L^s(q)$ están dadas por la descomposición en $\mathcal{U}_q(sl(2))$–irreducibles

$$\bigotimes^L V^s = \bigoplus_{s'} W_{s'} V^{s'}, \tag{4.27}$$

donde $W_{s'}$ es precisamente la irrep de $C_L^s(q)$ y su dimensión es igual a la multiplicidad de $V^{s'}$ en (4.27). Invirtiendo el razonamiento, dada la relación entre las irreps del centralizador y la descomposición (4.27)[12], podemos obtener información sobre esta última estudiando la teoría

[11] También en el caso de $\mathcal{U}_q(sl(n))$ se satisface una relación extra.

[12] Este hecho suele conocer como dualidad de Brauer–Weyl.

de representaciones del primero. Por ejemplo en el caso de q genérico[13], para el álgebra de Hecke $H_L(q)$, las representaciones irreducibles están en relación 1 a 1 con las del grupo de permutaciones de L objetos, S_L, a saber, los diagramas de Young con L cajas (Hamermesh 1989). La relación adicional (4.26) restinge los tableros de Young permitidos a los que tienen como mucho dos filas (Jones 1987).

Bajo el punto de vista del hamiltoniano invariante $\mathcal{U}_q(sl(2))$ de cadena abierta, la consecuencia inmediata de las consideraciones anteriores es que él mismo es un elemento del centralizador, y por tanto combinación lineal de los generadores de esta álgebra. Autoestados suyos correspondientes a autovalores distintos se agruparán en irreducibles bajo la acción de $C_L^s(q)$. Notar que, dado que (4.23) conmuta con $\mathcal{U}_q(sl(2))$, las dimensiones de las representaciones $W^{s'}$ se podrán leer como el número de irreps nuevas[14], que aparecen al aumentar $\mathcal{S}^z$ en una unidad. En lo que sigue vamos a ver a qué nos conducen las ideas que se acaban de apuntar en el caso de las cadenas abiertas invariantes nilpotentes. Notar que esto supone de entrada ponernos con representaciones de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ para q raíz de la unidad; para representaciones regulares éste es un caso problemático desde el punto de vista de la descomposición (4.27), ya que en principio aparecen representaciones que son reducibles, pero no completamente reducibles (Pasquier y Saleur 1990; Keller 1991). La diferencia es que nosotros consideramos la descomposición en irreducibles del producto de L nilpotentes, que no da origen para λ genéricos a representaciones no descomponibles como éstas que se mencionan (Gómez y Sierra 1992a; Arnaudon 1991).

Ahora el producto tensorial que pretendemos analizar coloca la nilpotente bidimensional V^λ en el lugar de V^s, y el centralizador es $C_L^q(\lambda)$ con $q^4 = 1$; está generado por la matriz (4.17). Ésta tiene dos autovalores, λ y λ^{-1}, de manera que los generadores (4.23) satisfacen la relación de Hecke

$$g_i^2 = (\lambda - \lambda^{-1})g_i + \mathbf{1}, \tag{4.28}$$

y el centralizador $C_L^q(\lambda)$ en el caso $q^4 = 1$ proporciona una representación del álgebra de Hecke $H_L(\lambda^2)$. Sin embargo, ahora la multiplicidad es 2 para ambos autovalores, consistentemente con las reglas de descomposición para valores genéricos de λ de las representaciones $\lambda \equiv V^\lambda$

$$\lambda \otimes \lambda = \bigoplus_{j=0}^{N'-1} \lambda^2 q^{-2j}, \tag{4.29}$$

con $q^N = 1$ (recordar la relación de N y N'). En el caso que nos ocupa tenemos

$$\lambda \otimes \lambda = \lambda^2 \oplus -\lambda^2. \tag{4.30}$$

El diagrama de Bratelli que asociamos a esta descomposición en irreducibles es el que se muestra en la figura 3.1. La dimensión de cada una de las dos irreducibles en las que se rompe

[13]Fuera de las raíces de la unidad, Wenzl 1988; Álvarez–Gaumé et al. 1989, 1990.

[14]Es decir, no conectadas con las existentes para un valor dado de $\mathcal{S}^z$ por la acción del álgebra cuántica.

Figura 4.1: Diagrama de Bratelli asociado a (3.29) para $q^4 = 1$.

Figura 4.2: Diagramas de Young asociados a $C_L^q(\lambda)$, $q^4 = 1$.

el producto $\bigotimes^L V^\lambda$ es 2^{L-1}, y estos son los números que aparecen en la figura. Ahora bien, los generadores construidos a partir de la matriz $\check{R}_\lambda$, no satisfacen la relación de TLJ, sino la siguiente

$$e_i^- e_{i+2}^- e_{i+1}^+ e_i^+ e_{i+2}^+ = e_i^- e_{i+2}^- e_{i+1}^- e_i^+ e_{i+2}^+ = 0, \tag{4.31}$$

$$e_i^\pm \equiv \frac{\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \pm \lambda^{\pm 1} \check{R}_i^\lambda}{1 + \lambda^{\pm 2}}, \tag{4.32}$$

que supone que los diagramas de Young permitidos en el caso nilpotente son los de tipo "escuadra" que se muestran en la figura 3.2. Ver otras generalizaciones de Hecke en Martin y Rittenberg 1992. Es interesante notar que los diagramas de Young como el de la figura son precisamente los únicos que contribuyen al polinomio de Alexander–Conway (Jones 1987). De hecho, la matriz $\check{R}_\lambda$ coincide precisamente con la interpoladora para el producto de dos copias de la representación fundamental de la superálgebra cuántica $\mathcal{U}_{\hat{q}}(gl(1,1))$ con $\hat{q} = \lambda$ (ver capítulo siguiente), que es la que utilizan Kauffman y Saleur 1991 para construir asimismo el polinomio de Alexander–Conway. $\check{R}_\lambda$ aparece en otros contextos, como representaciones q–bosónicas de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ (Ge et al. 1991) . Esto muestra descripciones alternativas para las representaciones nilpotentes de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ para $q^4 = 1$.

Teniendo en cuenta la relación (4.31), el diagrama de Bratelli que resulta para las irreducibles del centralizador es el de la figura 3.3 (los números son las dimensiones de las irre-

Figura 4.3: Diagrama de Bratelli asociado a $C_L^q(\lambda)$ para $q^3 = 1$.

Figura 4.4: Diagrama de Bratelli $C_L^q(\lambda)$ $q^4 = 1$ vs. regla de fusión (3.29).

ducibles de $H_L(\lambda^2)$ módulo dicha relación adicional). Comparando con la figura 3.1 advertimos que no coinciden (que es lo que esperaríamos de aplicarse aquí la dualidad de Brauer–Weyl de la manera estándar), aunque pueden relacionarse como se indica en la 3.4. A la vista de este hecho quedan varias posibilidades:

- El conjunto de generadores (4.23) es incompleto, en el sentido de que $C_L^{\mathrm{i}}(\lambda)$ posee generadores adicionales que mezclan entre sí algunas de las representaciones que eran irreducibles bajo $\{g_i\}_1^{L-1}$; la regla de descomposición (4.29) es válida y la identificación en la figura 4 tiene lugar leyendo la flecha hacia la derecha.

- Las representaciones del álgebra cuántica son idénticas a las de un álgebra en la que existen casimires adicionales que distinguen como verdaderas representaciones, diferentes subespacios de las irreps de la figura 3.1; (4.29) no es completa y la identificación en la figura 4 tiene lugar leyendo la flecha hacia la izquierda.

- El centralizador $C_L^{\mathrm{i}}(\lambda)$ está realmente generado por los $\{g_i\}$, pero la dualidad de Brauer–Weyl no funciona de la manera estándar para las representaciones nilpotentes.

En el caso que estamos considerando, la respuesta adecuada parece la segunda, en el contexto de $\mathcal{U}_{\hat{q}}(gl(1,1))$, donde existe un casimir adicional $\mathcal{N}$ que toma valores distintos para subespacios

Figura 4.5: Diagrama de Bratelli asociado a $C_L^q(\lambda)$ para $q^3 = 1$.

de $\bigotimes^L V^\lambda$ con autovalor de $\Delta^{(L)}(K)$ constante. Esto es, en lugar de (4.29) tendríamos

$$(\lambda_1, n_1) \otimes (\lambda_2, n_2) = \bigoplus_{r=0}^{N'-1} (\lambda_1 \lambda_2 \epsilon^{-2r}, n_1 + n_2 + r). \tag{4.33}$$

Una regla de fusión como ésta también aparece en el caso $N' = \infty$ (Gómez y Sierra 1993).

Consideramos ahora el siguiente caso no trivial, a saber el $q^3 = 1$. El ingrediente con el que se construyen ahora los generadores $\{g_i\}_0^{L-1}$ del centralizador es la matriz simétrica

$$\check{R}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1-\lambda^{-2} & & \lambda^{-1} & & & & & \\ & & \epsilon\lambda^{-2}\omega^2(\lambda) & & \mathrm{i}\epsilon\omega(\lambda)\lambda^{-2} & & \lambda^{-2} & & \\ & \lambda^{-1} & & 0 & & & & & \\ & & \mathrm{i}\epsilon\omega(\lambda)\lambda^{-2} & & \epsilon^2\lambda^{-2} & & 0 & & \\ & & & & & -\epsilon\tilde{\omega}^2(\lambda)\lambda^{-3} & & \epsilon\lambda^{-3} & \\ & & \lambda^{-2} & & & & 0 & & \\ & & & & & \epsilon\lambda^{-3} & & 0 & \\ & & & & & & & & \epsilon^2\lambda^{-4} \end{pmatrix}, \tag{4.34}$$

donde $\tilde{\omega}^2(\lambda) = \lambda\epsilon^{-1} - \lambda^{-1}\epsilon$. En general (4.34) posee tres autovalores distintos.

Por ejemplo el hamiltoniano invariante (4.20) para el caso de $L = 2$ se escribe directamente en términos de esta matriz y de su cuadrado

$$H_1(\lambda) = \frac{1}{\omega^2(\lambda)} \left\{ 2(\epsilon - \epsilon^{-1}\lambda^2 - \epsilon\lambda^{-2})\, \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\lambda^2\epsilon^2(2 - \lambda^2 - \epsilon^2\lambda^{-2})\check{R}_\lambda + 2\epsilon^2\lambda^4(\check{R}_\lambda)^2 \right\}, \tag{4.35}$$

y análogamente para valores genéricos de L. El diagrama de Bratelli asociado al centralizador se da en la figura 3.5, donde los números vuelven a indicar las dimensiones de las irreducibles. Por ejemplo, las cifras del tercer nivel de esta figura (cadena con tres espines) corresponde al número de hwv que aparecen para cada nivel M en la figura 3.6, donde M es el número dado

Figura 4.6: Autoestados de (3.20) para $L = 3$.

Figura 4.7: Diagrama de Bratelli asociado a (3.29) para $q^3 = 1$.

por $M(e_{r_1} \otimes e_{r_2} \otimes e_{r_3}) = r_1 + r_2 + r_3$, con $\{e_r\}_{r=0}^{2}$ la base de V^λ. En esta figura cada punto denota uno de los estados linelamente independientes para cada valor de M. Los puntos unidos por líneas verticales están conectados por la acción de los generadores del álgebra cuántica sobre el espacio $V^\lambda \otimes V^\lambda \otimes V^\lambda$, de manera que poseen el mismo autovalor de la energía, y asimismo el del generador $\Delta^{(3)}(K)$, que también se da en la figura. Notar que las irreps que aparecen en esta figura para cada valor de M están en relación 1 a 1 con las representaciones de $L = 3$ de la figura 3.5. De hecho se puede comprobar explícitamente que las transformaciones g_i generadas por la matriz (4.34) cierran sobre cada subespacio de M fijo. Esto contrasta con el diagrama de Bratelli que se deduciría aquí de la regla (4.29), ver figura 3.7. La descomposición (4.33) sería de nuevo compatible con las figuras 3.5 y 3.6, aunque aquí estaría por identificar el casimir $\mathcal{N}$ adicional (de hecho, y en paralelo con el caso $q^4 = 1$, se podría especular con que el presente fuera una especie de generalización "cúbica" de supersimetría). Así como en el caso $q^4 = 1$ las representaciones nilpotentes suponen para el centralizador un cociente de

Figura 4.8: Autovalores exactos del hamiltoniano invariante (3.20) para $L = 3$.

Hecke distinto de TLJ, es natural especular con que en el caso cúbico nos encontraríamos en presencia de un cociente de Hecke distinto del álgebra de Birman–Wenzl–Murakami, que es la que corresponde a la representación regular de espín 1.

Finalmente, en la figura 3.8 se presentan los resultados de la diagonalización exacta del hamiltoniano (4.20) (salvo una constante de proporcionalidad inesencial) para una cadena de tres espines ($L = 3$). Notar que los autovalores de la energía correspondientes a hwv con el mismo valor de M tienen un comportamiento similar. Una característica interesante que se aprecia en la figura es que el parámetro nilpotente λ juega aquí un papel análogo como parámetro libre al que desempeñaba la anisotropía $q = e^{\mathrm{i}\gamma}$ en el caso de las cadenas invariantes $\mathcal{U}_q(sl(2))$ en representaciones regulares. En particular, para valores específicos de λ existe mezcla de representaciones, con la peculiaridad de que aquí son raíces de la unidad conmensurables con la longitud de la cadena $\lambda = \epsilon^{M/2L},\ M = 0, 1, \ldots 2L$. Entre estos valores de λ se encuentran el límite regular[15] $\lambda = \epsilon^2$ y los llamados puntos orbifold. Esto también significa que, fijando λ y variando el tamaño de la cadena L, se puede modificar la degeneración de los niveles de energía. En el caso cuadrático $q^4 = 1$ se encuentra el mismo fenómeno (Hinrichsen y Rittenberg 1992b).

[15] Valor conmensurable entre la anisotropía y el espín en la terminología de Berkovich et al. 1993.

4.3 Efectos de tamaño finito.

Según hemos comenzado a ver en los apartados precedentes, la invariancia del hamiltoniano bajo el álgebra cuántica tiene consecuencias importantes sobre la física de las cadenas de espines. Una de las más relevantes en ejemplos conocidos (Saleur y Bauer 1989; Pasquier y Saleur 1990) es la modificación del valor de la extensión central c de Virasoro correspondiente a la teoría conforme que describe el límite continuo del modelo[16]. Hay dos maneras de obtener la extensión central del modelo en cuestión. Una es a través del análisis del calor específico del sistema (para el que previamente se ha tomado el límite termodinámico $L \to \infty$) para temperaturas $T \to 0$. La otra consiste en estudiar los efectos del tamaño finito L del sistema sobre la energía de su estado fundamental, considerados en el límite de L muy grande. Ambos resultados se relacionan a través de la equivalencia entre un sistema estadístico clásico definido sobre una banda de anchura finita L y un sistema cuántico unidimensional a temperatura $T = 1/L$ (ver Dasmahapatra et al. 1993). En particular, las correcciones a la energía del estado fundamental introducidas por los efectos de tamaño finito para el hamiltoniano de cadenas cerrada y abierta son, respectivamente (Blöte et al. 1986, Affleck 1986; una referencia de carácter introductorio es por ejemplo Cardy 1990)

$$\begin{aligned} \text{Cadena cerrada}: &\qquad E_0 = E_\infty - \frac{\pi\zeta c}{6L} + O(L^{-2}), \\ \text{Cadena abierta}: &\qquad E_0 = E_\infty + f_\infty - \frac{\pi\zeta c}{24L} + O(L^{-2}). \end{aligned} \tag{4.36}$$

donde E_∞ es la contribución de volumen a la energía del estado fundamental en cada caso y f_∞ la energía debida a los términos de superficie; ζ es un factor independiente de las condiciones de contorno, que aparece como una constante de proporcionalidad en la relación de dispersión para las excitaciones sin masa $\epsilon \sim \zeta\ k$ (velocidad del sonido); normalizar el hamiltoniano original por este factor supone reescalar las direcciones espacial y temporal de manera isótropa, y obtener invariancia rotacional a grandes distancias como exige la invariancia conforme (Gehlen et al. 1985). Existe relación análoga a las (4.36), esta vez referida a los efectos de tamaño finito sobre el autovalor máximo de la matriz de transferencia equivalente (Cardy 1986; Pearce y Klümper 1991). La dependencia del parámetro espectral u aparece en ella a través del factor que allí juega el papel de la velocidad del sonido, y que está directamente relacionado con la anisotropía del retículo (Kim y Pearce 1987). Las (4.36) podrían considerarse como la derivada logarítmica de estas expresiones para el autovalor de la matriz de transferencia.

Fijado el modelo, la modificación de las condiciones de contorno puede suponer cambios en el valor de la anomalía conforme c. Así por ejemplo, la introducción de una línea de defecto en un modelo XXZ con condiciones periódicas, o equivalentemente un twist en éstas últimas

[16]Si se está en el régimen adecuado de parámetros para el que la teoría asociada no tiene gap de masas.

(Destri y de Vega 1989) cambia el valor de c de 1 a $c < 1$. Análoga modificación se consigue en una cadena abierta XXZ con términos de frontera invariantes $\mathcal{U}_q(sl(2))$ en representación 1/2: la extensión central cambia de su valor $c = 1$ para condiciones abiertas con término de frontera genérico $p(\sigma_1^z - \sigma_L^z)$ (p una constante, ver Saleur y Bauer 1989), a valer

$$c = 1 - \frac{6\gamma^2}{\pi(\pi - \gamma)} \tag{4.37}$$

para el hamiltoniano (3.26), cuando $p = \frac{q-q^{-1}}{2}$ con $q = e^{\mathrm{i}\gamma}$. Si tomamos $\gamma = \frac{\pi}{m+1}$, (4.37) da la extensión central característica de los modelos minimales unitarios (Belavin et al. 1984, Friedan et al. 1984)

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \quad m = 2, 3, \ldots \tag{4.38}$$

El propósito de esta sección es mostrar que la equivalencia en este sentido entre la inserción de una línea de defecto (twist) y las condiciones de cadena abierta invariante $\mathcal{U}_q(sl(2))$ se extiende (ciñéndonos a considerar modelos tipo XXZ y sus análogos anisótropos de espín superior) al caso de espín 1. Confirmaremos de forma analítica resultados numéricos de Martins 1990, que en concreto refuerzan la analogía formal entre las matrices $K_\pm(u)$ que proporcionan invariancia, y un twist de ángulo $\phi = \gamma$. Acabaremos con algunos comentarios sobre el caso de las cadenas abiertas nilpotentes.

4.3.1 Cadena de espín 1 regular, invariante $\mathcal{U}_q(sl(2))$.

Como se desprende de las relaciones (4.36), para analizar los efectos de tamaño finito es necesario diagonalizar el hamiltoniano, o equivalentemente la matriz de transferencia asociada. La técnica estándar es la del Ansatz de Bethe (AB), según alguna de las diferentes maneras de implementarlo. En nuestro caso además hemos de tener en cuenta dos características importantes del modelo: la representación de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ que colocamos en cada punto de la cadena no es la fundamental, sino la de espín 1, y además queremos considerar las condiciones de contorno de cadena abierta. Esta segunda condición exige, o bien trabajar con el AB coordenado como en Alcaraz et al. 1987, en cuyo caso es difícil generalizar a modelos con espín superior al 1/2, o bien modificar el AB algebraico habitual de cadena cerrada (Fadeev 1982) como se hace en Sklyanin 1988; también en esta referencia se considera exclusivamente un espacio auxiliar de dimensión 2, siendo tridimensional el del caso que a nosotros nos interesa. Sin embargo, este procedimiento se presta mejor a la generalización, recurriendo a la matriz de transferencia: la manera es construir una auxiliar $\tilde{t}(u)$ asociada a un espacio de dimensión 2, y que conmute con la matriz de transferencia original $t(u)$. Si la matriz $R(u)$ corresponde a una representación regular de espín $s > 1/2$ de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$, esta construcción se puede realizar mediante el llamado procedimiento de fusión (Kulish et al. 1981; Kulish y Sklyanin 1982), por el cual todo queda expresado esencialmente en términos suyos. De esta manera se resuelven para cadena cerrada los análogos de espines $s \geq 1$ de los modelos isótropo XXX (Babujian 1983; Takhtadkhan 1982) y anisótropo XXZ (Sogo 1984; Babujian y Tsvelick 1986; Kirillov y Reshetikhin 1987). Para cadena abierta este procedimiento ha sido generalizado en Mezincescu et al. 1990; Mezincescu y Nepomechie 1992b,c. El resultado para el autovalor, bien del hamiltoniano, bien de la matriz de transferencia, viene dado en términos de una colección de números $\{u_j\}_{j=1}^{M}$, soluciones de las llamadas ecuaciones de Bethe (BAE).

Para el modelo de cadena abierta invariante $\mathcal{U}_q(sl(2))$ en representación regular $s = 1$, la matriz $R(u)$ es

$$R(u) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & a && c &&&&& \\ && b && d && e && \\ & c && a &&&&& \\ && d && f && d && \\ &&&&& a && c & \\ && e && d && b && \\ &&&&& c && a & \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix}, \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{sh}(u+2\mathrm{i}\gamma)}, \quad b = \frac{\mathrm{sh}(u)\mathrm{sh}(u-\mathrm{i}\gamma)}{\mathrm{sh}(u+\mathrm{i}\gamma)\mathrm{sh}(u+2\mathrm{i}\gamma)}, \quad d = \frac{\mathrm{sh}(u)\mathrm{sh}(2\mathrm{i}\gamma)}{\mathrm{sh}(u+\mathrm{i}\gamma)\mathrm{sh}(u+2\mathrm{i}\gamma)}, \\ c &= \frac{\mathrm{sh}(2\mathrm{i}\gamma)}{\mathrm{sh}(u+2\mathrm{i}\gamma)}, \quad e = \frac{\mathrm{sh}(\mathrm{i}\gamma)\mathrm{sh}(2\mathrm{i}\gamma)}{\mathrm{sh}(u+\mathrm{i}\gamma)\mathrm{sh}(u+2\mathrm{i}\gamma)}, \quad f = a + e. \end{aligned}$$

El autovalor $\nu(u)$ de la matriz de transferencia de una cadena abierta con L espines[17] utilizando las matrices (4.18) ha sido determinado por Mezincescu et al. 1990; aquí consideraremos la función

$$\Lambda(u) = \frac{\mathrm{sh}^2(2u+\mathrm{i}\gamma)\,(\mathrm{sh}(u+\mathrm{i}\gamma)\,\mathrm{sh}(u+2\mathrm{i}\gamma))^{2L}}{\mathrm{sh}(\zeta_+)\,\mathrm{sh}(\zeta_+-\mathrm{i}\gamma)}\,\nu(u). \tag{4.40}$$

El factor que se ha introducido no afecta ni a las propiedades de analiticidad que se estudian más abajo, ni a los efectos de tamaño finito que nos interesan[18], y permite considerar el caso invariante $\mathcal{U}_q(sl(2))$ ($\zeta_\pm \to \infty$) (Mezincescu et al. 1990), para el que

$$\Lambda(u) = L(u)\;L(u+\mathrm{i}\gamma) - \mathrm{sh}(2u-\mathrm{i}\gamma)\;\mathrm{sh}(2u+3\mathrm{i}\gamma)\;(\mathrm{sh}(u-\mathrm{i}\gamma)\mathrm{sh}(u+2\mathrm{i}\gamma))^{2L}\,, \tag{4.41}$$

donde utilizamos las funciones auxiliares

$$L(u) \;=\; \mathrm{sh}(2u+\mathrm{i}\gamma)\Phi(u+\mathrm{i}\gamma)\frac{Q(u-\mathrm{i}\gamma)}{Q(u)} + \mathrm{sh}(2u-\mathrm{i}\gamma)\Phi(u-\mathrm{i}\gamma)\frac{Q(u+\mathrm{i}\gamma)}{Q(u)}, \tag{4.42}$$

[17] Por conveniencia tomaremos L par.

[18] El logaritmo de este término da su contribución a la energía libre del sistema, y resulta proporcional al tamaño del sistema L. La extensión central aparece en el coeficiente del término $1/L$.

$$Q(u) = \prod_{j=1}^{M} \mathrm{sh}(u-u_j)\,\mathrm{sh}(u+u_j), \tag{4.43}$$
$$\Phi(u) = (\mathrm{sh}(u))^{2L}\,. \tag{4.44}$$

Los parámetros $\{u_j\}_{j=1}^M$ satisfacen las BAE

$$\left(\frac{\mathrm{sh}(u_j+\mathrm{i}\gamma)}{\mathrm{sh}(u_j-\mathrm{i}\gamma)}\right)^{2L} = \prod_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{M} \frac{\mathrm{sh}(u_j-u_k+\mathrm{i}\gamma)\,\mathrm{sh}(u_j+u_k+\mathrm{i}\gamma)}{\mathrm{sh}(u_j-u_k-\mathrm{i}\gamma)\,\mathrm{sh}(u_j+u_k-\mathrm{i}\gamma)}. \tag{4.45}$$

Para el estado fundamental es $M = L$, y las raíces de estas BAE forman un conjunto de $L/2$ parejas de números complejos conjugados (2–cadenas) (Martins 1990). En el límite $L \to \infty$, el módulo de su parte imaginaria tiende a $\gamma/2$.

Más adelante serán útiles las funciones

$$P(u) = \frac{\mathrm{sh}(2u-\mathrm{i}\gamma)\,\Phi(u-\mathrm{i}\gamma)\,Q(u+\mathrm{i}\gamma)}{\mathrm{sh}(2u+\mathrm{i}\gamma)\,\Phi(u+\mathrm{i}\gamma)\,Q(u-\mathrm{i}\gamma)}, \tag{4.46}$$
$$h(u) = \mathrm{sh}(2u-\mathrm{i}\gamma)\,\mathrm{sh}(2u+3\mathrm{i}\gamma)\left\{\frac{1}{P(u)} + \frac{P(u+\mathrm{i}\gamma)}{P(u)} + P(u+\mathrm{i}\gamma)\right\}, \tag{4.47}$$

en términos de las cuales el autovalor (4.41) se escribe

$$\Lambda(u) = \Phi(u+2\mathrm{i}\gamma)\,\Phi(u-\mathrm{i}\gamma)\,h(u), \tag{4.48}$$

y las BAE

$$P(u_j) = -\frac{\mathrm{sh}(2u_j-\mathrm{i}\gamma)}{\mathrm{sh}(2u_j+\mathrm{i}\gamma)}. \tag{4.49}$$

Conviene hacer un comentario. Para el caso genérico de cadena abierta, en principio tanto las ecuaciones de Bethe (4.45) como el autovalor de la matriz de transferencia contienen algunos factores que son contribuciones de los términos de frontera. En el límite de invariancia bajo el grupo cuántico $\zeta_\pm \to \infty$, todos estos factores se cancelan entre sí y desaparecen de las BAE y de $\Lambda(u)$. Nos interesa destacar que en este caso las ecuaciones correspondientes a una cadena abierta de longitud L están "dobladas" respecto a las de cadena periódica con el mismo tamaño: en el miembro de la izquierda el exponente es $2L$ en lugar del L del caso periódico, y en el miembro de la derecha las raíces aparecen con el signo del caso periódico, y con el inverso. El autovalor de la matriz de transferencia resulta estar "doblado" de una manera análoga. El fenómeno es general (Mezincescu y Nepomechie 1992c) y se debe a la construcción (3.10) de la matriz de transferencia, en la que podemos pensar que ésta no es más que una cerrada recorrida una vez en cada sentido e imponiendo reflexiones elásticas en los extremos. Así, el autovalor de la matriz de transferencia contiene dos veces la contribución del hamiltoniano de cadena abierta correspondiente: nótese que, debido a la condición (3.13), la expresión (3.14) supone que, salvo términos proporcionales a la identidad,

$$H = \frac{1}{2}\left.\frac{d\ln t_a(u)}{du}\right|_{u=0}. \tag{4.50}$$

Hay un factor 2 de diferencia respecto a la expresión análoga para el caso de cadena cerrada, que habremos de tener en cuenta más abajo.

Una vez diagonalizado el hamiltoniano, los efectos de tamaño finito pueden atacarse estudiando la densidad de raíces para el estado fundamental como en de Vega y Woynarovich 1985; Woynarovich y Eckle 1987. La técnica es aplicable al caso del modelo XXZ (Hamer et al. 1987) u otros en los que el estado fundamental esté formado por un conjunto de raíces (de las BAE) reales; sin embargo, es inaplicable para modelos de espines más altos, en los que el estado fundamental consiste en un conjunto de raíces complejas, el valor de cuyas partes imaginarias resulta modificado en el límite $L \to \infty$ por los efectos de tamaño finito (de Vega y Woynarovich 1990). Otras formas de obtener información sobre la extensión central del modelo, como el AB térmico (ver una introducción en Mezincescu y Nepomechie 1992d) también descansan fuertemente en la forma de las raíces del estado fundamental. Nosotros utilizamos aquí un procedimiento indirecto desarrollado en KBP, que aprovecha propiedades de analiticidad del autovalor de la matriz de transferencia y evita manejar las densidades de raíces. Adaptaremos los argumentos que en esta referencia se dan para la cadena de espín 1 cerrada y con twist, a nuestro caso de cadena abierta. Como allí, consideramos por conveniencia anisotropías $\gamma < \pi/3$ y que la cadena tiene un número L par de espines. No debería existir problema en la extensión de los resultados que siguen al resto del rango $0 < \gamma < \pi/2$, pero ello exigiría una redefinición de las regiones de analiticidad que se consideran aquí, y no vamos a intentar tal cálculo. Los detalles se dejan para el apéndice al final de este capítulo. El resultado que nos interesa es que el logaritmo del autovalor de la matriz de transferencia se escribe, para grandes valores de L,

$$\ln \Lambda(x - \mathrm{i}\gamma) = L f_v(x - \mathrm{i}\gamma) + f_s(x - \mathrm{i}\gamma) - \frac{\pi \mathrm{i}}{12L} \mathrm{sh}\left(\frac{\pi x}{\gamma}\right) \frac{3}{2}\left(1 - \frac{8\gamma^2}{\pi(\pi - 2\gamma)}\right), \tag{4.51}$$

donde x es una variable real, y $f_v,\ f_s$ son respectivamente las contribuciones volúmica y de superficie a la energía libre. Evaluando la expresión anterior en $x - \mathrm{i}\gamma \to x$ y comparando con los resultados de tamaño finito con los coeficientes adecuados para cadena abierta, concluimos que

$$c = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{8\gamma^2}{\pi(\pi - 2\gamma)}\right). \tag{4.52}$$

Son pertinentes algunos comentarios sobre este resultado. El valor (4.52) es el primer caso que conocemos de extensión central obtenida analíticamente para una cadena abierta de espín $s > 1/2$. Previamente ha sido obtenido de forma numérica por Martins 1990 (donde también se determinan la energía libre superficial y el peso conforme más bajo), y es idéntico al que se da en KBP para el mismo modelo, con las condiciones de contorno twisteadas

$$S^z_{L+1} = S^z_1, \qquad S^\pm_{L+1} = e^{\pm 2\mathrm{i}\phi} S^\pm_1; \tag{4.53}$$

basta sustituir su ángulo de twist ϕ por la anisotropía γ. Las condiciones (4.53) se implementan en la matriz de transferencia $t_{twist}(u)$ mediante

$$K = \begin{pmatrix} e^{2\mathrm{i}\phi} & & \\ & 1 & \\ & & e^{-2\mathrm{i}\phi} \end{pmatrix}, \tag{4.54}$$

por comparar con la matriz M solución de la simetría de Twist para la $R(u)$ dada por (4.39)

$$M = \begin{pmatrix} e^{2\mathrm{i}\gamma} & & \\ & 1 & \\ & & e^{-2\mathrm{i}\gamma} \end{pmatrix}. \tag{4.55}$$

Ésta es la solución para la $K_+(u)$ de cadena abierta invariante, que corresponde al gauge homogéneo de la matriz $R(u)$; para el otro extremo será $K_-(u) = \mathbf{1}$. La matriz de transferencia $t_a(u)$ que entonces resulta no es esencialmente más que la $t_{twist}(u)$ para una cadena "doblada".

Esta relación quizá pudiera ayudar a entender el papel de las soluciones para las matrices $K_\pm(u)$ dependientes de parámetro espectral, en el contexto de las álgebras cuánticas afines (ACA). Ya se comentó en el anterior capítulo los grandes parecidos formales entre las ecuaciones de reflexión y la construcción del modelo de cadena abierta, con las ecuaciones que definen las ACA, y el problema con el carácter no afín de las primeras. Este hecho está relacionado con la interpretación de dichas ecuaciones como reflexiones elásticas con las paredes. En una cadena cerrada con twist no se pierde el carácter afín (véanse las correspondientes BAE). Este hecho junto a la conexión vista entre las matrices $K_\pm(u)$ de cadena abierta y las que proporcionan twists, nos hacen especular con que las condiciones twisteadas permitieran dar una interpretación en términos del ACA $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ a las matrices $K_\pm(u)$.

La expresión (4.52) es el análogo para espín 1 de la (4.37) vista para espín 1/2. Aquí podemos también considerar cómo queda la extensión central para valores de la anisotropía que sean múltiplos racionales de π,

$$\gamma = \pi/(m+2), \quad m = 2, 3, 4, \ldots \tag{4.56}$$

Se obtiene la correspondiente a la serie unitaria superconforme (Friedan et al. 1985)

$$c = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{8}{m(m+2)}\right). \tag{4.57}$$

En el caso de espín 1/2, el valor de la extensión central para la cadena invariante $\mathcal{U}_q(sl(2))$, junto a las propiedades del centralizador, que ya vimos que era el álgebra TLJ, hacían pensar en esta álgebra como un análogo discreto de Virasoro (Pasquier y Saleur 1989): en el retículo los análogos de los campos primarios serían los vectores de Bethe hwv de $\mathcal{U}_q(sl(2))$. Para espín 1 el centralizador es el álgebra de Birman–Wenzl–Murakami, y sería entonces natural pensarla como el análogo discreto del álgebra $N = 1$ superconforme.

4.3.2 Cadenas nilpotentes.

Para este caso podríamos pensar en seguir un enfoque análogo a las invariantes regulares de la sección anterior. Por analogía con ellas, y dado el intercambio de papeles entre q y λ que se mencionó en la sección sobre el centralizador, tenderíamos a pensar en una dependencia de la extensión central con el parámetro nilpotente λ. Sin embargo, el caso más sencillo ($q^4 = 1$) nos muestra que no es así. En efecto, podemos utilizar los resultados de Hamer et al. 1987, según los cuales la extensión central

$$c = 1 - \frac{6\pi}{\pi - \gamma}\left(1 - \frac{\gamma + \Gamma + \Gamma'}{\pi}\right)^2 \tag{4.58}$$

corresponde al hamiltoniano de cadena abierta

$$H = -\frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{L-1}\left\{\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y\sigma_{j+1}^y + \Delta\sigma_j^z + \sigma_{j+1}^z\right\} + p\sigma_1^z + p'\sigma_L^z\right\}, \tag{4.59}$$

donde Γ y Γ' se definen a través de

$$e^{2\mathrm{i}\Gamma} = \frac{p - \Delta - e^{\mathrm{i}\gamma}}{(p-\Delta)e^{\mathrm{i}\gamma} - 1} \quad , \quad e^{2\mathrm{i}\Gamma'} = \frac{p' - \Delta - e^{\mathrm{i}\gamma}}{(p'-\Delta)e^{\mathrm{i}\gamma} - 1}. \tag{4.60}$$

Multiplicando nuestro hamiltoniano de cadena abierta nilpotente $H_{1/2}(\lambda)$ por el factor de normalización adecuado para poder aplicar estas expresiones, queda

$$H_{1/2}(\lambda) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{L-1}\left\{\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y\sigma_{j+1}^y\right\} + \frac{1}{2\lambda}\sigma_1^z + \frac{\lambda}{2}\sigma_L^z - \cos(\psi)\sum_{j=1}^{L}\sigma_j^z \tag{4.61}$$

(recordar $\lambda = e^{\mathrm{i}\psi}$). Si comparamos este hamiltoniano con el (4.59) ignorando el término de campo magnético en (4.61) obtenemos para éste

$$c = -2. \tag{4.62}$$

Este valor podría obtenerse si formalmente tomáramos $m = 1$ en la fórmula (4.38) para la c de los modelos minimales. Es el caso de una teoría no unitaria.

Es posible ignorar el término de campo magnético como hemos hecho, ya que es un operador que conmuta con el resto del hamiltoniano (4.61); su efecto es modificar la velocidad del sonido y añadir a los autovalores de la energía una contribución proporcional al espín $\mathcal{S}^z$ total, que no es sensible a las correcciones de tamaño finito y por lo tanto no contribuye a la extensión central. En todo esto nos mantenemos para valores reales de $\psi \Rightarrow |\cos(\psi)| \leq 1$. El valor (4.62) para la extensión central es así el mismo que se tenía sobre el punto regular $\lambda = q^{2\frac{1}{2}} = \mathrm{i}$ para la raíz de la unidad considerarda $q^4 = 1$ (ver Saleur 1992 y las referencias que se dan ahí); λ acopla entonces operadores que no modifican c. De hecho, ya en la expresión (4.19) observamos que el parámetro λ no afecta a los términos más relevantes del hamiltoniano sino como un factor de normalización (velocidad del sonido), con lo que uno no esperaría que afectase a la clase de universalidad. De forma grosera quizá podríamos haber intuido este resultado sabiendo ya que las soluciones $K_\pm(u)$ a las ecuaciones de reflexión no dependían de λ sino sólo de la raíz de la unidad en la que se estaba, y las modificaciones a la extensión central vienen a través de los términos de frontera que proporcionan estas matrices.

La siguiente pregunta que uno se haría sería la relativa a la posible dependencia $c = c(\lambda)$ para el modelo invariante nilpotente $q^3 = 1$. No es posible argüir meramente extrapolando la respuesta negativa del ejemplo anterior, ya que los modelos de cadena abierta nilpotente $q^4 = 1$ y $q^3 = 1$ son en principio notablemente distintos: mientras que (4.19) define un modelo de fermiones libres, (4.20) esperamos que suponga un modelo con interacción.

Dado que tratamos con un modelo de tres estados, sería natural intentar aplicar la técnica KBP de la sección anterior. Sin embargo, mientras que allí vimos que, para cadena invariante en representaciones regulares, las propiedades de analiticidad del autovalor de la matriz de transferencia no se modifican respecto al caso de condiciones de contorno periódicas (tampoco cambia la velocidad del sonido), todo lo contrario ocurre en el caso de las cadenas nilpotentes: tanto las propiedades de analiticidad como la velocidad del sonido se modifican en términos del parámetro λ. Las regiones de analiticidad se "estrechan" de manera que la técnica KBP de análisis de efectos de tamaño finito resulta difícilmente aplicable incluso en el caso de cadena cerrada. En principio aquí uno podría esperar una efectiva dependencia $c = c(\lambda)$, ya que el parámetro nilpotente λ no sólo entra en el hamiltoniano (4.20) como un factor de normalización (velocidad del sonido), sino también como acoplo en los términos relevantes. Probablemente la única manera factible de obtener la respuesta analítica a esta cuestión pase por el Ansatz de Bethe térmico. Constituiría una extensión muy natural del presente trabajo.

4.4 Apéndice: Efectos de tamaño finito según KBP.

Se dan aquí los aspectos más relevantes del cálculo analítico que conduce al resultado (4.52). Para más detalles sobre lo que sigue referimos a KBP, y Pearce y Klümper 1991.

Definamos las siguientes funciones auxiliares

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{a}}(x) &= \frac{1+P(x)}{P(x)\;P(x-\mathrm{i}\gamma)} = \left[\tanh\left(\frac{\pi x}{2\gamma}\right)\right]^{2L} \mathsf{a}(x), && (4.63)\\ \hat{\mathsf{b}}(x) &= \frac{1}{P(x)\;(1+P(x-\mathrm{i}\gamma))} = \left[\tanh\left(\frac{\pi x}{2\gamma}\right)\right]^{2L} \mathsf{b}(x), && (4.64)\\ \hat{\mathsf{c}}(x) &= \frac{1}{P(x-\mathrm{i}\gamma)} = \left[\tanh\left(\frac{\pi x}{2\gamma}\right)\right]^{2L} \mathsf{c}(x), && (4.65)\\ \mathsf{U}(x) &= 1+\hat{\mathsf{a}}(x), && (4.66)\\ \mathsf{B}(x) &= 1+\hat{\mathsf{b}}(x), && (4.67)\\ \mathsf{C}(x) &= 1+\hat{\mathsf{c}}(x), && (4.68) \end{aligned}$$

donde la variable x se considerará real en lo que sigue. En las ecuaciones (4.63) a (4.65) se ha extraído el comportamiento volúmico (bulk) de las correspondientes funciones, generalizando a cadena abierta el observado para el caso periódico. Dado que vamos a considerar el estado fundamental, se tienen las siguientes propiedades para las funciones auxiliares definidas:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi(u)} &= \Phi(\bar{u}),\\ \overline{Q(u)} &= Q(\bar{u}),\\ \overline{P(u)} &= \frac{1}{P(\bar{u})}, \end{aligned}$$

(la barra denota conjugación compleja), así como las siguientes regiones de analiticidad, en las que podremos tomar transformadas de Fourier de las funciones y de sus inversas (son regiones dentro de las cuales estará permitido hacer deformaciones de contornos de integración; coinciden con las de KBP para las funciones análogas)

$$\begin{array}{ll} \Phi(u) & 0<\mathrm{Im}(u)<\pi,\\ Q(u) & -\pi+\gamma/2<\mathrm{Im}(u)<-\gamma/2,\\ L(u) & 0\le \mathrm{Im}(u)\le\gamma,\\ \Lambda(u) & -\gamma\le\mathrm{Im}(u)\le 0,\\ \mathsf{a}(u) & 0<\mathrm{Im}(u)\le\gamma,\\ h(u) & -\gamma\le\mathrm{Im}(u)\le 0, \end{array} \qquad (4.69)$$

Definimos la transformada de Fourier por

$$\mathcal{F}_k\left[f\right] = \frac{1}{2\pi}\int f(y)e^{-\mathrm{i}ky}\,dy, \qquad f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_k\left[f\right] e^{\mathrm{i}ky}\,dk\;. \qquad (4.70)$$

Para asegurarnos un decaimiento de las funciones suficientemente rápido en el infinito, conviene tomar transformadas de las derivadas segundas de sus logaritmos. Por ejemplo para la función $\Phi(u)$ es $\ln\Phi(u)'' = -2L/\mathrm{sh}^2(u)$.

La estrategia es buscar relaciones, bien definidas en las (4.69) (se ha de usar la πi–periodicidad de las funciones para llevar los argumentos siempre a dichas regiones), entre las funciones auxiliares; esto nos permitirá llegar a un sistema de ecuaciones integrales no lineales para las $\hat{\mathsf{a}}$, $\hat{\mathsf{b}}$, $\hat{\mathsf{c}}$, válido para cualquier L.

Por un lado

$$\frac{\bar{\mathsf{c}}(x)}{\mathsf{c}(x)} = \frac{\mathrm{sh}(2x+\mathrm{i}\gamma)\,\mathrm{sh}(2x-3\mathrm{i}\gamma)}{\mathrm{sh}(2x+3\mathrm{i}\gamma)\,\mathrm{sh}(2x-\mathrm{i}\gamma)}\frac{\Phi(x+\pi\mathrm{i}-2\mathrm{i}\gamma)\;Q(x+2\mathrm{i}\gamma-\pi\mathrm{i})}{\Phi(x++2\mathrm{i}\gamma)\;Q(x-2\mathrm{i}\gamma)}. \tag{4.71}$$

Derivando 2 veces respecto de x, tomando logaritmos y aplicando transformada Fourier obtenemos

$$\mathcal{F}_k\left[\ln\bar{\mathsf{c}}\right]'' - \mathcal{F}_k\left[\ln\mathsf{c}\right]'' = \frac{\mathrm{sh}(k(\frac{\pi}{2}-2\gamma))}{\mathrm{sh}(k(\frac{\pi}{2}-\gamma))}\mathcal{F}_k\left[\ln p\right]'' + \frac{k/2}{1-e^{-\pi k/2}}\left(\mathrm{sh}(3k\gamma/2)-\mathrm{sh}(k\gamma/2)\right). \tag{4.72}$$

El resto de relaciones son idénticas a las del caso con twist. A saber, de

$$\frac{\mathsf{a}(x)}{\bar{\mathsf{a}}(x)} = \frac{\mathsf{c}(x)}{\bar{\mathsf{c}}(x)}\frac{1}{P(x)} \tag{4.73}$$

se obtiene

$$\mathcal{F}_k\left[\ln\mathsf{a}\right]'' - \mathcal{F}_k\left[\ln\bar{\mathsf{a}}\right]'' = \mathcal{F}_k\left[\ln\mathsf{c}\right]'' - \mathcal{F}_k\left[\ln\bar{\mathsf{c}}\right]'' - \mathcal{F}_k\left[\ln P\right]''. \tag{4.74}$$

De

$$\mathsf{b}(x) = \frac{\mathsf{c}(x)}{P(x)}\frac{\mathsf{B}(x)}{\mathsf{U}(x)} \tag{4.75}$$

y de su compleja conjugada se obtienen

$$\mathcal{F}_k\left[\ln\mathsf{b}\right]'' = \mathcal{F}_k\left[\ln\mathsf{c}\right]'' - \mathcal{F}_k\left[\ln P\right]'' + \mathcal{F}_k\left[\ln\mathsf{B}\right]'' - \mathcal{F}_k\left[\ln\mathsf{U}\right]'', \tag{4.76}$$

$$\mathcal{F}_k\left[\ln\bar{\mathsf{b}}\right]'' = \mathcal{F}_k\left[\ln\bar{\mathsf{c}}\right]'' + \mathcal{F}_k\left[\ln P\right]'' + \mathcal{F}_k\left[\ln\bar{\mathsf{B}}\right]'' - \mathcal{F}_k\left[\ln\bar{\mathsf{U}}\right]''. \tag{4.77}$$

Para $h(u)$ tenemos

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{\overline{\mathsf{U}}(x)}{P(x)}\,\mathrm{sh}(2x-\mathrm{i}\gamma)\,\mathrm{sh}(2x+3\mathrm{i}\gamma), \\ h(x-\mathrm{i}\gamma) &= \mathrm{sh}(2x-3\mathrm{i}\gamma)\,\mathrm{sh}(2x+\mathrm{i}\gamma)\;\mathsf{c}(x)\;\frac{\mathsf{B}(x)}{\mathsf{b}(x)}. \end{aligned}$$

Tomando transformada Fourier de la segunda derivada del logaritmo de estas expresiones y eliminando $\mathcal{F}_k\left[\ln h\right]''$ resulta

$$\mathcal{F}_k\left[\ln\bar{\mathsf{U}}\right]'' - \mathcal{F}_k\left[\ln P\right]'' = e^{-k\gamma}\left\{\mathcal{F}_k\left[\ln\mathsf{c}\right]'' + \mathcal{F}_k\left[\ln\mathsf{B}\right]'' - \mathcal{F}_k\left[\ln\mathsf{b}\right]''\right\}. \tag{4.78}$$

Finalmente, de la relación

$$\mathsf{a}(x+\mathrm{i}\gamma)=\frac{1}{\bar{\mathsf{b}}(x)} \tag{4.79}$$

y de su conjugada compleja sacamos

$$\mathcal{F}_k\left[\ln \mathsf{a}\right]''=-e^{k\gamma}\mathcal{F}_k\left[\ln \bar{\mathsf{b}}\right]'', \tag{4.80}$$

$$\mathcal{F}_k\left[\ln \mathsf{a}\right]''=-e^{-k\gamma}\mathcal{F}_k\left[\ln \mathsf{b}\right]''. \tag{4.81}$$

Las ecuaciones (4.72) a (4.81) forman un sistema lineal. Resolviéndolo, tomando transformadas inversas e integrando dos veces en x, se obtiene

$$\begin{aligned}
\ln(\mathsf{ac}) &= F*\ln\mathsf{U}+G*\ln\bar{\mathsf{U}}+H*\ln\mathsf{B}+\bar{H}*\ln\bar{B}-2\ln\frac{\mathrm{sh}(2x+\mathrm{i}\gamma)\ \mathrm{sh}(2x-3\mathrm{i}\gamma)}{\mathrm{sh}(2x-\mathrm{i}\gamma)\ \mathrm{sh}(2x+3\mathrm{i}\gamma)}\\
&\quad +C_1+D_1x,\\
\ln\frac{\mathsf{b}}{\mathsf{c}} &= \bar{H}*\ln\mathsf{U}+\bar{H}*\ln\bar{\mathsf{U}}+\ln\mathsf{B}+C_2+D_2x,\\
\ln P(x) &= H*\ln\mathsf{U}-\bar{H}*\ln\bar{\mathsf{U}}+C_3+D_3x,
\end{aligned} \tag{4.82}$$

donde $*$ denota el producto de convolución

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\ g(y)\ dy\ , \tag{4.83}$$

y hemos usado las mismas definiciones de KBP

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3\mu+2\mu\nu}{(1+\mu)^2}e^{\mathrm{i}kx}dk,\\
G(x) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-2\mu+2\nu}{(1+\mu)^2}e^{k(\mathrm{i}x-\epsilon)}dk,\\
H(x) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu}{1+\mu}e^{k(\mathrm{i}x+\epsilon)}dk,\\
\mu &= e^{-k\gamma},\\
\nu &= \frac{\mathrm{sh}(k(\frac{\pi}{2}-2\gamma))}{\mathrm{sh}(k(\frac{\pi}{2}-\gamma))}.
\end{aligned}$$

$\epsilon>0$ es un parámetro infinitesimal que permite hacer convergentes las integrales. El comportamiento asintótico

$$P(\pm\infty)=e^{-2\mathrm{i}\gamma} \tag{4.84}$$

y los que se deducen para las funciones $\mathsf{a}(x)$, $\mathsf{b}(x)$, $\mathsf{c}(x)$, $\mathsf{U}(x)$ y $\mathsf{B}(x)$, determinan que las constantes de integración $\{D_j\}_{j=1}^3$ y $\{C_j\}_{j=2}^3$ sean nulas; sólo no lo es la

$$C_1=2\mathrm{i}\gamma\frac{8\gamma-3\pi}{\pi-2\gamma}. \tag{4.85}$$

Con todo esto ya se puede escribir una ecuación para el autovalor de la matriz de transferencia. De (4.48) queda

$$\begin{aligned}\ln\Lambda(x-\mathrm{i}\gamma) &= \ln\left(\Phi(x+\mathrm{i}\gamma)\Phi(x-2\mathrm{i}\gamma)\right)+\ln\left(\mathrm{sh}(2x-3\mathrm{i}\gamma)\,\mathrm{sh}(2x+\mathrm{i}\gamma)\right)\\ &+\frac{\mathrm{i}}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\ln\mathsf{U}(x-y)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi}{\gamma}(y+\mathrm{i}\epsilon))}dy\ ,\end{aligned} \tag{4.86}$$

donde Re denota la parte real. Aquí se ha utilizado la tercera de (4.82) y una integración de contorno. (4.86) es una expresión para el autovalor válida en principio para cualquier L. En ella los sumandos que no están dentro de la integral son una contribución volúmica a la energía libre (proporcional al tamaño del sistema) $f_v(x-\mathrm{i}\gamma)L$ y una contribución a la energía libre superficial $f_s(x-\mathrm{i}\gamma)$, que no intervienen en los efectos de tamaño finito $1/L$. Éstos pueden analizarse utilizando el comportamiento de las funciones auxiliares para grandes valores de L que se anticipó arriba. Si nos colocamos sobre raíces cercanas al límite de la distribución, eso supone $x\sim\frac{\gamma}{\pi}\ln L$ para grandes L, ya que la densidad de raíces va como $\sigma\sim 1/\mathrm{ch}(\pi x/\gamma)$ (Sogo 1984; ver también de Vega y Woynarovich 1990). Los efectos de tamaño finito se van a considerar aquí como desviaciones respecto a estos valores de x. Llamemos a los de las funciones auxiliares en este rango de parámetros

$$\begin{aligned}\mathsf{a}_\pm(x) &= \lim_{L\to\infty}\hat{\mathsf{a}}\left(\pm\frac{\gamma}{\pi}(x+\ln L)\right),\\ \mathsf{A}_\pm(x) &= \lim_{L\to\infty}\mathsf{U}\left(\pm\frac{\gamma}{\pi}(x+\ln L)\right),\\ l\mathsf{a}_\pm(x) &= \ln\mathsf{a}_\pm(x),\\ l\mathsf{A}_\pm(x) &= \ln\mathsf{A}_\pm(x),\end{aligned} \tag{4.87}$$

y análogamente para $\hat{\mathsf{b}}(x)$, $\hat{\mathsf{c}}(x)$, $\mathsf{B}(x)$, $\mathsf{C}(x)$ y sus logaritmos. El siguiente límite dará un factor importante en los efectos $1/L$ que buscamos

$$\left(\tanh\frac{1}{2}(x+\ln L)\right)^{2L}\overset{L\to\infty}{\longrightarrow} e^{-4e^{-x}}. \tag{4.88}$$

Introduciendo el cambio de variable $y=\pm\frac{\gamma}{\pi}(y'+\ln L)$ en

$$I=\frac{\mathrm{i}}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\ln\mathsf{U}(x-y)}{\mathrm{sh}(\frac{\pi}{\gamma}(y+\mathrm{i}\epsilon))}dy, \tag{4.89}$$

y tomando el límite de gran L, se obtiene

$$I=-\frac{2\mathrm{i}}{\pi L}e^{\pi x/\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}l\mathsf{A}_+(y)e^{-y}dy+\frac{2\mathrm{i}}{\pi L}e^{-\pi x/\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}l\mathsf{A}_-(y)e^{-y}dy. \tag{4.90}$$

Como se verá más abajo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}l\mathsf{A}_+(y)e^{-y}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}l\mathsf{A}_-(y)e^{-y}dy, \tag{4.91}$$

y yendo a (4.86), para grandes valores de L

$$\ln \Lambda(x - \mathrm{i}\gamma) = Lf_v(x - \mathrm{i}\gamma) + f_s(x - \mathrm{i}\gamma) - \frac{4\mathrm{i}}{\pi L}\mathrm{sh}(\frac{\pi x}{\gamma}) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re} l\mathsf{A}_\pm(y) e^{-y} dy. \tag{4.92}$$

Necesitamos pues determinar el valor de la integral que aparece en (4.92).

Las ecuaciones (4.82) para las funciones (4.87) dan lugar al siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} l\mathsf{a}_\pm + l\mathsf{c}_\pm \\ l\mathsf{b}_\pm - l\mathsf{c}_\pm \\ \overline{l\mathsf{a}}_\pm + \overline{l\mathsf{c}}_\pm \\ \overline{l\mathsf{b}}_\pm - \overline{l\mathsf{c}}_\pm \end{pmatrix} = -8e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + K * \begin{pmatrix} l\mathsf{A}_\pm \\ l\mathsf{B}_\pm \\ \overline{l\mathsf{A}}_\pm \\ \overline{l\mathsf{B}}_\pm \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \beta, \tag{4.93}$$

con

$$\begin{aligned} \beta &= -2\ln\left(\frac{\mathrm{sh}(\frac{2\gamma}{\pi}(x+\ln L)+\mathrm{i}\gamma)\ \mathrm{sh}(\frac{2\gamma}{\pi}(x+\ln L)-3\mathrm{i}\gamma)}{\mathrm{sh}(\frac{2\gamma}{\pi}(x+\ln L)-\mathrm{i}\gamma)\ \mathrm{sh}(\frac{2\gamma}{\pi}(x+\ln L)+3\mathrm{i}\gamma)}\right) + 2\mathrm{i}\gamma\frac{8\gamma-3\pi}{\pi-2\gamma} \\ &= \frac{2\pi\mathrm{i}\gamma}{\pi-2\gamma}. \end{aligned} \tag{4.94}$$

Este factor es el mismo de KBP sustituyendo su ángulo de twist ϕ por la anisotropía γ. El núcleo integral $K(x)$ está dado por la matriz

$$K(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) & H_1(x) & G_1(x) & \overline{H}_1(x) \\ \overline{H}_1(x) & 1 & \overline{H}_1(x) & 0 \\ \overline{G}_1(x) & H_1(x) & \overline{F}_1(x) & \overline{H}_1(x) \\ H_1(x) & 0 & H_1(x) & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.95}$$

en la que

$$F_1(x) = \frac{\gamma}{\pi}F(\pm\frac{\gamma}{\pi}x), \quad G_1(x) = \frac{\gamma}{\pi}G(\pm\frac{\gamma}{\pi}x), \quad H_1(x) = \frac{\gamma}{\pi}H(\pm\frac{\gamma}{\pi}x). \tag{4.96}$$

Gracias a las propiedades

$$\overline{F}(z) = F(-\bar{z}), \quad F(-z) = F(z), \tag{4.97}$$

e idénticas para $G(z)$ y $H(z)$, (4.95) satisface la simetría

$$K^t(x-y) = K(y-x). \tag{4.98}$$

La propiedad (4.98) se puede utilizar para calcular la integral que aparecía en (4.92) (Pearce y Klümper 1991, KPB). Derivamos en (4.93) y multiplicamos el resultado por la izquierda por el vector fila $(l\mathsf{A}_\pm, l\mathsf{B}_\pm, \overline{l\mathsf{A}}_\pm, \overline{l\mathsf{B}}_\pm)$. A (4.93) lo multiplicamos por la izquierda por el

$(l\mathsf{A}'_\pm, l\mathsf{B}'_\pm, \overline{l\mathsf{A}}'_\pm, \overline{l\mathsf{B}}'_\pm)$ y restamos la diferencia de las dos operaciones. Finalmente integramos en la variable x. Gracias a (4.98) se cancelan toda una serie de contribuciones, y el resultado es

$$\begin{aligned}
32\int_{-\infty}^{\infty} & e^{-x}\mathrm{Re}\,l\mathsf{A}_\pm dx = \\
= & \int_{-\infty}^{\infty}(l\mathsf{a}'_\pm l\mathsf{A}_\pm - l\mathsf{a}_\pm l\mathsf{A}'_\pm)dx + \int_{-\infty}^{\infty}(\overline{l\mathsf{a}}'_\pm \overline{l\mathsf{A}}_\pm - \overline{l\mathsf{a}}_\pm \overline{l\mathsf{A}}'_\pm)dx + \\
+ & \int_{-\infty}^{\infty}(l\mathsf{b}'_\pm l\mathsf{B}_\pm - l\mathsf{b}_\pm l\mathsf{B}'_\pm)dx + \int_{-\infty}^{\infty}(\overline{l\mathsf{b}}'_\pm \overline{l\mathsf{B}}_\pm - \overline{l\mathsf{b}}_\pm \overline{l\mathsf{B}}'_\pm)dx + \\
+ & \int_{-\infty}^{\infty}(l\mathsf{c}'_\pm l\mathsf{C}_\pm - l\mathsf{c}_\pm l\mathsf{C}'_\pm)dx + \int_{-\infty}^{\infty}(\overline{l\mathsf{c}}'_\pm \overline{l\mathsf{C}}_\pm - \overline{l\mathsf{c}}_\pm \overline{l\mathsf{C}}'_\pm)dx + \\
+ & \frac{2\pi\mathrm{i}\gamma}{\pi-2\gamma}\ln\left(\frac{\mathsf{A}_\pm(\infty)}{\overline{\mathsf{A}}_\pm(\infty)}\right). \qquad (4.99)
\end{aligned}$$

Finalmente, con el uso de los comportamientos asintóticos determinados para las funciones auxiliares y las propiedades de la función dilogaritmo de Rogers $L(z)$ (ver referencias en KBP)

$$L_+(z) = \frac{1}{2}\int_0^z \left(\frac{\ln(1+y)}{y} - \frac{\ln y}{1+y}\right)dy = L\left(\frac{z}{1+z}\right), \qquad (4.100)$$

$$\frac{\pi^2}{6} = L(z) + L(1-z) \equiv L\left(\frac{x}{1+x}\right) + L\left(\frac{1}{1+x}\right) = L_+(x) + L_+\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (4.101)$$

se llega al resultado

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\mathrm{Re}\,l\mathsf{A}_\pm dx &= \frac{1}{32}\left(\pi^2 + \frac{2\pi\mathrm{i}\gamma}{\pi-2\gamma}\ln\left(\frac{\mathsf{A}_\pm(\infty)}{\overline{\mathsf{A}}_\pm(\infty)}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{32}\left(\pi^2 - \frac{8\pi\gamma^2}{\pi-2\gamma}\right), \qquad (4.102)
\end{aligned}$$

que es el que se utiliza en el texto.

Capítulo 5

Modelo de Fermiones Libres

Como se mencionó en la Introducción, existe un modelo de vértices de gran interés y que históricamente ha jugado un papel muy destacado en la teoría de sistemas integrables. Se trata del modelo de ocho vértices (8V) en campo cero. Baxter resolvió dicho sistema (ver una introducción en Baxter 1982) planteando un sistema de vértices en el que cada lado podía estar en uno de dos posibles estados; por ejemplo flecha entrante o saliente del vértice. Si se suprimen todas las configuraciones en las que el número de flechas que entran o salen en un vértice no es par, y se pide simetría bajo inversión de todas las flechas[1], quedan sólo 8 configuraciones posibles para cada vértice. La mencionada invariancia bajo inversión supone que, si se piensa en las flechas como dipolos eléctricos, no hay ningún campo externo aplicado. A esta razón se debe el nombre del modelo; ya se citó en la Introducción que el hamiltoniano asociado es el modelo XYZ unidimensional. La matriz $R(u)$ posee únicamente 8 pesos de Boltzmann no nulos, y la damos a continuación por mor de referencia

$$R_{8V}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{sn}(u+\gamma) & & & k\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}(u+\gamma)\,\mathrm{sn}(\gamma) \\ & \mathrm{sn}(u) & \mathrm{sn}(\gamma) & \\ & \mathrm{sn}(\gamma) & \mathrm{sn}(u) & \\ k\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}(u+\gamma)\,\mathrm{sn}(\gamma) & & & \mathrm{sn}(u+\gamma) \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

donde sn denotará en lo sucesivo el seno elíptico de módulo k, $\mathrm{sn}(u,k) \equiv \mathrm{sn}(u)$, a no ser que se especifique lo contrario, y análogamente para el resto de funciones elípticas que aparezcan (sobre éstas véase por ejemplo Byrd y Friedman 1971). Dado el uso repetido que haremos de ellos, para referencia posterior damos aquí el valor de los límites trigonométrico e hiperbólico de las funciones elípticas de Jacobi $\mathrm{sn}(u)$, $\mathrm{cn}(u)$, $\mathrm{dn}(u)$:

[1]En el sentido de asignar igual peso estadístico a dos configuraciones relacionadas entre sí por una transformación de este tipo.

	$\mathrm{sn}(u)$	$\mathrm{cn}(u)$	$\mathrm{dn}(u)$
Límite trigonométrico $k=0$	$\mathrm{sen}(u)$	$\cos(u)$	1
Límite hiperbólico $k=1$	$\tanh(u)$	$1/\mathrm{ch}(u)$	$1/\mathrm{ch}(u)$

Por ejemplo, si tomamos el límite trigonométrico en (5.1), es interesante notar que la matriz que se obtiene no es más que la ya conocida $R(u)$ del modelo 6V. Como vemos en (5.1), este límite equivale a anular los elementos $R^{11}_{00}(u)$, $R^{00}_{11}(u)$, de forma que la matriz $R(u)$ pasa de tener una simetría $\mathbf{Z}_2$

$$R_{8V}(u)^{kl}_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow i+j = k+l \pmod{2}, \tag{5.2}$$

a tener simetría $U(1)$, $[R_{6V}(u), \sigma^z \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \sigma^z] = 0$; equivalentemente:

$$R_{6V}(u)^{kl}_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow i+j = k+l. \tag{5.3}$$

También es posible ver que el límite anterior no supone más que suprimir los vértices que son fuentes (salen todas) o sumideros (entran todas) de flechas (conservación de la corriente). En concreto este límite es el que supone el régimen crítico del modelo 8V (siempre que $|\Delta = \cos(\gamma)| \leq 1$). Aparte de estas consideraciones de tipo físico, lo que sabemos es que la matriz $R(u)$ del 6V no es más que la interpoladora entre dos copias de $V^{1/2} \otimes V^{1/2}$ con $V^{1/2}$ la representación de espín 1/2 de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$. Así pues, sería natural buscar una interpretación de (5.1) como interpoladora dentro de alguna estructura tipo álgebra cuántica. Sin embargo, y a pesar del interés que ha suscitado este problema, no existe hasta el momento ninguna interpretación en dicho sentido (sí se ha estudiado el álgebra que define (5.1) a través de una relación tipo (2.4), la llamada álgebra de Sklyanin, ver Sklyanin 1982, 1983). Tal significado proporcionaría, por ejemplo, una forma natural de extender la simetría oculta tipo grupo cuántico que existe en las teorías conformes, a las teorías q–deformadas asociadas a la ecuación de q–Knizhnik–Zamolodchikov (Frenkel y Reshetikhin 1992) y que aparecen en el contexto de modelos masivos (véase por ejemplo Davies et al. 1993 para el XXZ masivo $\Delta < -1$).

Sin embargo, existe otro modelo integrable de 8V aparte del de campo cero, cuyo parámetro espectral u también está definido sobre un toro (los pesos de Boltzmann son funciones elípticas de u). Se trata del modelo de fermiones libres de Fan y Wu. El modelo estadístico fue ya resuelto por estos autores (Fan y Wu 1969, 1970). En general, puede verse (Baxter 1982) que un modelo de 8 vértices equivale a un modelo de Ising anisótropo con interacciones diagonales (segundos próximos vecinos) y una interacción a cuatro espines. La llamada condición de fermiones libres sobre los pesos de Boltzmann, que aquí expresamos como elementos de la matriz $R(u)$

$$R^{00}_{00}(u)R^{11}_{11}(u) + R^{01}_{01}(u)R^{10}_{10}(u) = R^{11}_{00}(u)R^{00}_{11}(u) + R^{10}_{01}(u)R^{01}_{10}(u), \tag{5.4}$$

supone esencialmente la eliminación de una interacción a 4 espines y es la que permite la resolución exacta, y la identificación del modelo con uno de Ising tipo damero (checkerboard, Baxter 1986). La diagonalización de la matriz de transferencia y una primera expresión de la matriz $R(u)$ se deben a Felderhof 1973. Nosotros utilizaremos la parametrización empleada por Bazhanov y Stroganov 1985. En términos suyos, la matriz $R(u)$ elíptica más general, solución de la ecuación de Yang–Baxter que satisface la condición de fermiones libres (5.4) se escribe

$$\begin{aligned}
a = R^{00}_{00}(u) &= 1 - e(u)e(\psi_1)e(\psi_2), \\
\tilde{a} = R^{11}_{11}(u) &= e(u) - e(\psi_1)e(\psi_2), \\
b = R^{01}_{01}(u) &= e(\psi_2) - e(u)e(\psi_1), \\
\tilde{b} = R^{10}_{10}(u) &= e(\psi_1) - e(u)e(\psi_2), \\
c = R^{10}_{01}(u) &= R^{01}_{10}(u) = (e(\psi_1)\ \mathrm{sn}(\psi_1))^{1/2}\ (e(\psi_2)\ \mathrm{sn}(\psi_2))^{1/2}\ (1 - e(u))\ \frac{1}{\mathrm{sn}(u/2)}, \\
d = R^{11}_{00}(u) &= R^{00}_{11}(u) = -\mathrm{i}\ k\ (e(\psi_1)\mathrm{sn}(\psi_1))^{1/2}\ (e(\psi_2)\mathrm{sn}(\psi_2))^{1/2}\ (1 + e(u))\ \mathrm{sn}(u/2),
\end{aligned} \tag{5.5}$$

donde k es el módulo elíptico, $\psi_{1,2}$ son dos parámetros arbitrarios, y $e(u)$ denota la exponencial elíptica

$$e(u) = \mathrm{cn}(u) + \mathrm{i}\ \mathrm{sn}(u). \tag{5.6}$$

Una propiedad útil de esta función es que

$$e(u)\ e(-u) = 1 \quad \forall u.$$

Sin embargo, en general

$$e(u_1 + u_2) \neq e(u_1)\ e(u_2).$$

La matriz (5.5) es menos simétrica que la (5.1): en general $a \neq \tilde{a}$, $b \neq \tilde{b}$. Con la interpretación mencionada arriba, esto supone la existencia de un campo externo en el modelo. Se pueda apreciar también en la expresión para el hamiltoniano de cadena cerrada asociado. Dada la simetría de regularidad

$$R(0; \psi, \psi) \propto \mathcal{P}, \tag{5.7}$$

y utilizando la definición (2.8), queda el modelo XY en un campo magnético (Lieb et al. 1961):

$$H = \frac{1}{4\ \mathrm{sn}(\psi)} \sum_{j=1}^{L} [(1+\Gamma)\sigma^x_j \sigma^x_{j+1} + (1-\Gamma)\sigma^y_j \sigma^y_{j+1} + h(\sigma^z_j + \sigma^z_{j+1})], \tag{5.8}$$

donde

$$\Gamma = \frac{2cd}{ab + \tilde{a}\tilde{b}} = k\ \mathrm{sn}(\psi) \quad , \quad h = \frac{a^2 + b^2 - \tilde{a}^2 - \tilde{b}^2}{2(ab + \tilde{a}\tilde{b})} = \mathrm{cn}(\psi). \tag{5.9}$$

Nótese la existencia de dos parámetros independientes (h, ψ), o equivalentemente (Γ, h).

La ecuación de YB satisfecha por (5.5) es algo más general que la vista en el primer capítulo (damos la correpondiente a la $\check{R}(u) = \mathcal{P}R(u)$):

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{1} \otimes \check{R}(u; \psi_1, \psi_2))(\check{R}(u+v; \psi_1, \psi_3) \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \check{R}(v; \psi_2, \psi_3)) = \\
&\qquad = (\check{R}(v; \psi_2, \psi_3) \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \check{R}(u+v; \psi_1, \psi_3))(\check{R}(u; \psi_1, \psi_2) \otimes \mathbf{1}).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Motivados por el caso de 8V con campo cero, lo que nos proponemos en este capítulo es definir una estructura tipo álgebra cuántica afín, dentro de la cual la matriz (5.5) actúe como interpoladora, confiando en ganar de esta manera alguna intuición sobre el caso de Baxter. Comenzaremos analizando el límite trigonométrico de (5.5), que resulta no ser otra que la matriz $R(u)$ nilpotente del caso $q^4 = 1$ estudiada en los capítulos anteriores. Aquí la consideraremos desde el punto de vista equivalente de la superálgebra cuántica $\mathcal{U}_q(gl(1,1))$ (Rozansky y Saleur 1992), sobre la cual haremos algunos comentarios, y compararemos en diversos aspectos con $\mathcal{U}_q(sl(2))$. Esto introduce la relación de la matriz $R(u)$ con supersimetría. De hecho, se puede ver que la parte $N = 2$ de la matriz S solitónica para el superpotencial de Ginzburg–Landau $W = X^{n+1}/(n+1) - \beta X$ está dada por la interpoladora de $\mathcal{U}_{\hat{q}}(gl(1,1))$ para raíces de la unidad[2] $\hat{q}^n = 1$ (Fendley e Intriligator 1992). La relación de $R(u)$ con teorías supersimétricas $N = 2$ se considerará tras la sección dedicada al caso elíptico. En dicho apartado se introduce la estructura para la que (5.5) actúa como interpoladora: es una deformación cuántica tipo afín del álgebra de Clifford en dos dimensiones, que denotamos por $\widehat{CH_q}(2)$; también se presentará brevemente el caso independiente de parámetro espectral $CH_q(2)$. El límite trigonométrico de la primera, es decir, la nilpotente de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ con $q = \mathrm{i}$, se puede reformular como la extensión central de un álgebra supersimétrica $N = 2$ (Bernard y LeClair 1990; López 1993). En la exposición de estos resultados seguiremos muy de cerca la referencia Cuerno et al. 1993b.

Como en los anteriores capítulos de esta tesis, nos plantearemos el problema de las condiciones de contorno, ahora relacionado con este modelo de vértices elíptico. En concreto, se estudiarán las matrices $K_\pm(u)$ de reflexión elástica que permiten construir la cadena abierta integrable. Obtendremos el primer ejemplo de matrices de reflexión elípticas. Para ellas se presenta el mismo problema de traza nula que observamos en las asociadas a irreducibles de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ para q raíz de la unidad; no obstante, el hamiltoniano de cadena abierta se puede obtener procediendo de manera análoga a como se hizo en aquellos otros casos. Aquí, sin embargo, no existe dependencia de parámetros libres, y el hamiltoniano que obtengamos será directamente invariante bajo $CH_q(2)$ en representaciones específicas. Éste es el contenido de la referencia Cuerno y González–Ruiz 1993.

5.1 Caso trigonométrico.

Si tomamos en límite trigonométrico $k = 0$ en (5.5), es sencillo ver que se obtiene la matriz $R(u)$ (4.10) interpoladora de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ en representaciones nilpotentes para $q^4 = 1$, sin más que identificar $u_{(4.10)} = \mathrm{i}\ u_{(5.5)}/2$. Bajo una transformación gauge adecuada como las que se consideró en los capítulos anteriores, puede verse que, salvo factores globales irrelevantes, esta

[2]Adviértase que esto corresponde a valores de λ que son raíces de la unidad. Ver capítulo 3.

matriz es a su vez equivalente a la

$$\check{R}_{\lambda_1,\lambda_2}(u) = e^{u}\ \check{R}_{\lambda_1,\lambda_2} - e^{-u}\ (\check{R}_{\lambda_1,\lambda_2})^{-1}, \tag{5.11}$$

donde

$$\check{R}_{\lambda_1,\lambda_2} \equiv \begin{pmatrix} (\lambda_1\ \lambda_2)^{1/2} & & & \\ & \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2} (\lambda_1 - \lambda_1^{-1})^{1/2}(\lambda_2 - \lambda_2^{-1})^{1/2} & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{1/2} & \\ & \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2} & 0 & \\ & & & -(\lambda_1\ \lambda_2)^{-1/2} \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Esta última matriz es la interpoladora para $V^{(1)} \otimes V^{(2)}$, con $V^{(j)}$ una representación irreducible de la superálgebra $\mathcal{U}_q(gl(1,1))$.

5.1.1 $\mathcal{U}_q(gl(1,1))$.

La superálgebra $\mathcal{U}_q(gl(1,1))$ está generada por la unidad, el elemento central $\mathcal{E}$ y $\{\mathcal{N}, \psi, \psi^+\}$, que satisfacen las siguientes relaciones de (anti)conmutación:

$$\{\psi, \psi^+\} = \frac{q^{2\mathcal{E}} - \mathbf{1}}{q - q^{-1}}\ ,\ \ \psi^2 = (\psi^+)^2 = 0\ ,\ \ [\mathcal{N}, \psi^+] = \psi^+\ ,\ \ [\mathcal{N}, \psi] = -\psi, \tag{5.13}$$

y está dotada de la siguiente comultiplicación

$$\begin{aligned} \Delta(\psi) = q^{\mathcal{E}}(-1)^{\mathcal{N}} \otimes \psi + \psi \otimes \mathbf{1}, &\qquad \Delta(\psi^+) = q^{\mathcal{E}}(-1)^{\mathcal{N}} \otimes \psi^+ + \psi^+ \otimes \mathbf{1}, \\ \Delta(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathcal{E}, &\qquad \Delta(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathcal{N}, \end{aligned}$$

Las representaciones irreducibles $V \equiv (e, n)$ que no sean unidimensionales tienen dimensión 2, y están caracterizadas por dos etiquetas: el valor e del elemento central $\mathcal{E}$ y el número n, relacionado con el valor del segundo casimir existente, o también

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} n-1 & \\ & n \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

La superálgebra $\mathcal{U}_{\hat{q}}(gl(1,1))$ se puede poner en correspondencia con $\mathcal{U}_q(sl(2))$ sobre las representaciones nilpotentes λ para $q^4 = 1$ de la siguiente manera

$$K = q^{\mathcal{E}}(-1)^{\mathcal{N}}, \quad \psi^+ = FK, \quad \psi = E; \tag{5.15}$$

$\mathcal{N}$ es esencialmente H. En particular es $\lambda = q^{\mathcal{E}} = \hat{q}$. (5.12) puede verse que es efectivamente la interpoladora para $\mathcal{U}_{\hat{q}}(gl(1,1))$ con $V^{(j)} \equiv (e_j, n_j)$, y en consecuencia (5.11) lo es para $\mathcal{U}_{\hat{q}}(gl\widehat{(1,1)})$.

A lo largo de todo lo visto hasta aquí, en los diferentes cálculos y ejemplos, hemos podido seguir un cierto paralelismo entre el modelo 6V asociado a la represesntación fundamental (espín $s = 1/2$) de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$, y la cadena nilpotente λ invariante $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ para $q^4 = 1$, o equivalentemente relacionada con $\mathcal{U}_{\hat{q}}(gl(1,1))$, para las que las irreducibles son asimismo bidimensionales. En la tabla 4.1 se resumen de forma comparada las características más notables de ambos casos. Algo análogo podría hacerse con la representación regular ($s = 1$) de $\mathcal{U}_q(sl(2))$, y la nilpotente λ para $q^3 = 1$, aunque faltaría por completar varias de las entradas en la tabla correspondiente.

Tabla 4.1	$\mathcal{U}_q(sl(2))$	$\mathcal{U}_q(gl(1,1))$
Generadores	$\{E, F, K\}$	$\{\mathcal{E}, \mathcal{N}, \psi, \psi^+\}$
Casimires	$C_{1/2}$ (C. Cuadrático)	(e, n)
Matriz R	$\begin{pmatrix} q & & & \\ & q-q^{-1} & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda-\lambda^{-1} & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & -\lambda^{-1} \end{pmatrix}$
Autoval. (Multip.)	$q\ (3),\ -q^{-1}\ (1)$	$\lambda\ (2),\ -\lambda^{-1}\ (2)$
Centralizador	$g_i g_{i+1} g_i + g_i g_{i+1} + g_{i+1} g_i + g_i + g_{i+1} + 1 = 0$	$e_i^- e_{i+2}^- e_{i+1}^+ e_i^+ e_{i+2}^+ = e_i^- e_{i+2}^- e_{i+1}^- e_i^+ e_{i+2}^+ = 0$
Invariante Nudos	Jones	Alexander $-$ Conway
Hamiltoniano (Cad. Abierta)	$H_{1/2} = \frac{1}{2\,\mathrm{sen}(\gamma)} \left\{ \sum_{j=1}^{L-1} \left\{ \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \frac{q+q^{-1}}{2} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \right\} + \frac{q-q^{-1}}{2} (\sigma_1^z - \sigma_L^z) \right\}$	$H(\lambda) = \frac{1}{\lambda-\lambda^{-1}} \left\{ \sum_{j=1}^{L-1} \left\{ \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \frac{\lambda+\lambda^{-1}}{2} (\sigma_j^z + \sigma_{j+1}^z) \right\} + \frac{\lambda-\lambda^{-1}}{2} (\sigma_1^z - \sigma_L^z) \right\}$
Extensión central	$c = 1 - \frac{6\gamma^2}{\pi(\pi-\gamma)}$	$c = -2$

5.2 Caso elíptico.

En esta sección pasamos ya a considerar el caso elíptico. Como se ha anticipado, el álgebra cuántica en la que la matriz (5.5) actúa como interpoladora, $C\widehat{H_q}(2)$, es una suerte de extensión afín para la deformación cuántica del álgebra de Clifford en 2 dimensiones. Comenzaremos recordando el álgebra de Clifford en dimensión genérica D (Coquereaux 1982) y proponiendo un álgebra de Hopf relacionada. La q–deformación de dicha estructura será lo que denotaremos $CH_q(D)$, y la extensión tipo afín de ésta, $C\widehat{H_q(D)}$. A partir de dicho momento nos especializaremos[3] al caso $D = 2$. La cuestión fundamental será plantear las ecuaciones de interpolación en $C\widehat{H_q}(2)$ para la matriz $R(u)$; se discutirán las restricciones existentes para la solución, y la correcta identificación de los diversos parámetros. Finalizaremos el apartado volviendo al

[3]Ver López 1993 para el caso de D par arbitrario.

límite trigonométrico, y viendo la conexión anunciada con (la extensión central de) una superálgebra $N = 2$.

5.2.1 Deformación cuántica del álgebra de Clifford.

El álgebra de Clifford en dimensión arbitraria D, asociada a una métrica η, $C(D)$, está generada por la identidad y los elementos $\{\Gamma_\mu\}_{\mu=1}^{D}$, que verifican

$$\{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = 2\ \eta_{\mu\nu}\ \mathbf{1}, \quad \mu, \nu = 1, \ldots, D. \tag{5.16}$$

En relación con $C(D)$, introduzcamos una estructura de álgebra de Hopf; el objeto resultante lo denotaremos como álgebra de Clifford–Hopf, $CH(D)$. Está generada por Γ_μ, $\mu = 1, \ldots, D$, Γ_{D+1} y los elementos centrales $\{E_\mu\}_{\mu=1}^{D}$; se satisfacen las relaciones de (anti)conmutación

$$\begin{aligned} &\Gamma_\mu^2 = E_\mu \ \ , \ \ \Gamma_{D+1}^2 = \mathbf{1}, \\ &\{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = 0, \ \ \mu \neq \nu, \\ &\{\Gamma_\mu, \Gamma_{D+1}\} = 0, \\ &[E_\mu, \Gamma_\nu] = [E_\mu, \Gamma_{D+1}] = [E_\mu, E_\nu] = 0 \ \ \forall \mu, \nu. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Si definimos la comultiplicación (Δ), antípoda (S), y counidad (ϵ) siguientes, es sencillo comprobar que satisfacen las relaciones de un álgebra de Hopf:

$$\begin{array}{lll} \Delta(E_\mu) = E_\mu \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes E_\mu, & S(E_\mu) = -E_\mu, & \epsilon(E_\mu) = 0, \\ \Delta(\Gamma_\mu) = \Gamma_\mu \otimes \mathbf{1} + \Gamma_{D+1} \otimes \Gamma_\mu, & S(\Gamma_\mu) = \Gamma_\mu \Gamma_{D+1}, & \epsilon(\Gamma_\mu) = 0, \\ \Delta(\Gamma_{D+1}) = \Gamma_{D+1} \otimes \Gamma_{D+1}, & S(\Gamma_{D+1}) = \Gamma_{D+1}, & \epsilon(\Gamma_{D+1}) = 1. \end{array} \tag{5.18}$$

Para valores pares de D, tanto los elementos $\{E_\mu\}_1^D$ como el producto $\Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_D \Gamma_{D+1}$ son casimires de $CH(D)$. A la vista de (5.17), sobre las irreducibles tendremos que $E_\mu = \eta_{\mu\mu}$, y $\Gamma_{D+1} \sim \Gamma_1 \cdots \Gamma_D$. Es decir, las irreps de $CH(D)$ son isomorfas a las de $C(D)$ para todas las signaturas de la métrica. Por otro lado, para D impares, el casimir aparte de los $\{E_\mu\}$ es $\Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_D$; Γ_{D+1} es un elemento independiente y las representaciones de $CH(D)$ estarán relacionedas con las de $C(D)$ en dimensión $D + 1$.

La deformación cuántica de $CH(D)$, $CH_q(D)$, se introduce modificando tanto las relaciones de anticonmutación, como la comultiplicación para los elementos $\{\Gamma_\mu\}_1^D$ (y sólo para ellos), de manera tal que Δ continúe preservando las relaciones de (anti)conmutación. Damos las relaciones completas para posterior referencia

$$\begin{aligned} &\Gamma_\mu^2 = \frac{q^{E_\mu} - q^{-E_\mu}}{q - q^{-1}}, \quad \Gamma_3^2 = \mathbf{1}, \\ &\{\Gamma_x, \Gamma_y\} = 0, \quad \{\Gamma_\mu, \Gamma_3\} = 0, \\ &[E_\mu, \Gamma_\nu] = [E_\mu, \Gamma_3] = [E_\mu, E_\nu] = 0 \ \ \forall \mu, \nu. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Las relaciones de la coálgebra son

$$\begin{array}{lll} \Delta(E_\mu) = E_\mu \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes E_\mu, & S(E_\mu) = -E_\mu, & \epsilon(E_\mu) = 0, \\ \Delta(\Gamma_\mu) = \Gamma_\mu \otimes q^{-E_\mu/2} + q^{E_\mu/2}\Gamma_3 \otimes \Gamma_\mu, & S(\Gamma_\mu) = \Gamma_\mu\Gamma_3, & \epsilon(\Gamma_\mu) = 0, \\ \Delta(\Gamma_3) = \Gamma_3 \otimes \Gamma_3, & S(\Gamma_3) = \Gamma_3, & \epsilon(\Gamma_3) = 1. \end{array} \tag{5.20}$$

Para definir una afinización de esta álgebra cuántica, procedemos por analogía con, por ejemplo, el caso de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$. La estructrura completa exigiría introducir relaciones de Serre y un operador de derivación; aquí nos limitaremos a introducir los generadores de la "afinización" de $CH_q(D)$, $\widehat{CH_q(D)}$; son el elemento Γ_{D+1}, así como los $E_\mu^{(j)}, \Gamma_\mu^{(j)},\ \mu = 1, \ldots, D,\ j = 0, 1$. Las relaciones (5.19) y las definiciones (5.20) se satisfacen para cada valor de j.

$CH_q(2)$ vs. $\mathcal{U}_q(gl(1,1))$.

Una representación bidimensional de $CH_q(2)$ está caracterizada por 2 parámetros[4] $\xi = (\lambda_x, \lambda_y)$ y la proporcionan

$$\begin{aligned} \pi_\xi(\Gamma_x) &= \left(\frac{\lambda_x - \lambda_x^{-1}}{q - q^{-1}}\right)^{1/2} \sigma^x, \quad \pi_\xi(\Gamma_y) = \left(\frac{\lambda_y - \lambda_y^{-1}}{q - q^{-1}}\right)^{1/2} \sigma^y, \\ \pi_\xi(\Gamma_3) &= \sigma^z, \quad \pi_\xi(q^{E_x}) = \lambda_x, \quad \pi_\xi(q^{E_y}) = \lambda_y, \end{aligned} \tag{5.21}$$

donde las $\vec{\sigma}$ son como siempre las matrices de Pauli. Nótese que esta representación no es de tipo hwv, como se adelantó en el capítulo anterior.

$CH_q(2)$ es un álgebra muy similar a la deformación biparamétrica de la superálgebra $gl(1,1)$, $\mathcal{U}_{\alpha,\beta}(gl(1,1))$, propuesta por Hinrichsen y Rittenberg 1992a como simetría del hamiltoniano XY de cadena abierta con campo magnético. En su notación dicha álgebra está generada por $\{\mathcal{E}, \mathcal{F}, T^x, T^y\}$, tales que

$$\begin{aligned} &(T^x)^2 = [\mathcal{E}]_\alpha, \quad (T^y)^2 = [\mathcal{E}]_\beta, \\ &\{T^x, T^y\} = \{(-1)^{\mathcal{F}}, T^x\} = \{(-1)^{\mathcal{F}}, T^y\} = 0, \\ &[\mathcal{E}, T^x] = [\mathcal{E}, T^y] = 0, \end{aligned} \tag{5.22}$$

y el coproducto es

$$\begin{aligned} &\Delta(T^x) = \alpha^{\mathcal{E}/2}(-1)^{\mathcal{F}} \otimes T^x + T^x \otimes \alpha^{-\mathcal{E}/2}, \\ &\Delta(T^y) = \alpha^{\mathcal{E}/2}(-1)^{\mathcal{F}} \otimes T^y + T^y \otimes \alpha^{-\mathcal{E}/2}, \\ &\Delta(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathcal{E}, \quad \Delta(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathcal{F}, \end{aligned}$$

[4] A partir de ahora, y para evitar confusiones cuando consideremos el álgebra afín, se denotarán los valores de $\mu = 0, 1$ por $\mu = x, y$, respectivamente.

Nótese la existencia de dos q–números asociados a los dos parámetros de deformación α, β, y el coproducto diferente para los generadores T^x y T^y. Si $\alpha = \beta$, recuperamos la superálgebra estándar $\mathcal{U}_q(gl(1,1))$ vista en la sección anterior. Hacer $\alpha \neq \beta$ supone una anisotropía no nula para el sistema entre las partes x e y. La correspondencia entre $CH_q(2)$ y $\mathcal{U}_{\alpha,\beta}(gl(1,1))$ está dada por la sustitución $q^{E_x} \to \alpha^{\mathcal{E}}$, y $q^{E_y} \to \beta^{\mathcal{E}}$. Sin embargo, la diferencia entre ambas álgebras es que la primera tiene dos elementos centrales y un solo parámetro de deformación, mientras que la segunda posee un único elemento central $\mathcal{E}$, y 2 parámetros. Esta diferencia es crucial en la teoría de representaciones. En particular, veremos cómo las etiquetas de las representaciones de $CH_q(2)$, extendidas a $C\widehat{H_q}(2)$, son especialmente adecuadas para descubrir el parámetro espectral u, argumento de las funciones elípticas en (5.5) y que vive en el toro especificado por las mismas. Éste es además el parámetro en términos del cual se escribe la YB (5.10).

$C\widehat{H_q}(2)$.

Respecto a $C\widehat{H_q}(2)$, una representación bidimensional π_ξ está etiquetada por 3 parámetros complejos $\xi = (z, \lambda_x, \lambda_y)$ y está dada por

$$\pi_\xi(\Gamma_x^{(0)}) = \left(\frac{\lambda_x^{-1} - \lambda_x}{q - q^{-1}}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & z^{-1} \\ z & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \pi_\xi(\Gamma_x^{(1)}) = \left(\frac{\lambda_x - \lambda_x^{-1}}{q - q^{-1}}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & z \\ z^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi_\xi(\Gamma_y^{(0)}) = \left(\frac{\lambda_y^{-1} - \lambda_y}{q - q^{-1}}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & -iz^{-1} \\ iz & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \pi_\xi(\Gamma_y^{(1)}) = \left(\frac{\lambda_y - \lambda_y^{-1}}{q - q^{-1}}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & -iz \\ iz^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi_\xi(\Gamma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{array}{l} \pi_\xi(q^{E_x^{(0)}}) = \lambda_x^{-1}, \quad \pi_\xi(q^{E_x^{(1)}}) = \lambda_x, \\ \pi_\xi(q^{E_y^{(0)}}) = \lambda_y^{-1}, \quad \pi_\xi(q^{E_y^{(1)}}) = \lambda_y. \end{array} \tag{5.23}$$

Salvo las constantes, esta representación se relaciona con la de espín 1/2 de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ nivel 0 de la siguiente manera:

$$\Gamma_x^{(j)} = E_j + F_j, \quad \Gamma_y^{(j)} = \mathrm{i}(F_j - E_j), \quad j = 0, 1.$$

5.2.2 Matriz $R(u)$.

Las ecuaciones que definen la matriz $\check{R}_{\xi_1,\xi_2}$ interpoladora entre las irreps ξ_1, ξ_2 de esta álgebra cuántica son

$$\check{R}_{\xi_1\xi_2}\Delta_{\xi_1\xi_2}(a) = \Delta_{\xi_2\xi_1}(a)\check{R}_{\xi_1\xi_2} \quad \forall a \in C\widehat{H_q}(2). \tag{5.24}$$

Si suponemos que $\check{R}_{\xi_1,\xi_2}$ es una matriz invertible, tomando trazas en (5.24) obtenemos el siguiente conjunto de condiciones

$$\mathrm{Tr}\ \Delta_{\xi_1\xi_2}(a) = \mathrm{Tr}\ \Delta_{\xi_2\xi_1}(a) \quad \forall a \in C\widehat{H_q}(2). \tag{5.25}$$

Tomando para a distintos elementos del álgebra, las condiciones (5.25) se satisfacen idénticamente debido a las relaciones de $C\widehat{H_q}(2)$. Sin embargo, si consideramos la “mezcla” de las raíces 0 y 1 dada por ejemplo en

$$a \equiv \Gamma_x^{(0)}\ \Gamma_y^{(1)}, \tag{5.26}$$

aparece una condición sobre las etiquetas de las representaciones que admiten interpoladora. Efectivamente, usando $E_\mu^{(0)} = -E_\mu^{(1)} \equiv -E_\mu$, (5.25) supone aquí

$$\frac{\mathrm{Tr}_1(\Gamma_x^{(0)}\ \Gamma_y^{(1)})}{\mathrm{Tr}_1(q^{E_x/2}\ q^{-E_y/2} - q^{-E_x/2}\ q^{E_y/2})} = \frac{\mathrm{Tr}_2(\Gamma_x^{(0)}\ \Gamma_y^{(1)})}{\mathrm{Tr}_2(q^{E_x/2}\ q^{-E_y/2} - q^{-E_x/2}\ q^{E_y/2})} = C, \tag{5.27}$$

donde Tr_j denota la traza sobre la irrep ξ_j, y la constante C es independiente de la representación. Utilizando ahora (5.23), y llamando $C = \frac{k}{2}$, queda finalmente

$$\frac{2(\lambda_x - \lambda_y)}{(1-\lambda_x^2)^{1/2}(1-\lambda_y^2)^{1/2}(z^2 - z^{-2})} = k, \tag{5.28}$$

donde k aparece como una constante arbitraria independiente de la representación. Así pues, de los tres parámetros complejos que en principio caracterizaban la irrep ξ de $C\widehat{H_q}(2)$, quedan dos independientes, si es que ξ admite interpoladora. La ecuación (5.28) puede uniformizarse en términos de funciones elípticas de módulo k. Con esto lo que queremos decir es que se pueden encontrar unos parámetros en términos de los cuales (5.28) se convierte esencialmente en una identidad entre funciones elípticas. Si definimos una nueva variable φ (recuérdese (5.6)) como

$$z^2 = e(\varphi),$$

utilizando la identidad $\mathrm{sn}^2(\varphi) + k^2\ \mathrm{dn}^2(\varphi) = 1$ junto a (5.28), se obtiene

$$\mathrm{dn}(\varphi)^2 = \frac{(1-\lambda_x\ \lambda_y)^2}{(1-\lambda_x^2)\ (1-\lambda_y^2)},$$

así que si definimos

$$\lambda_x = \tanh x, \quad \lambda_y = \tanh y,$$

(5.28) equivale a la ecuación

$$\mathrm{dn}^2(\varphi) = \mathrm{ch}^2(x-y),$$

que significa que $x+y$ es independiente de ϕ; definiendo ahora

$$\tanh\left(\frac{x+y}{2}\right) = e(\psi),$$

podemos considerar que un punto arbitrario sobre la curva (5.28) está fijado por el valor del par (φ, ψ).

El resultado obtenido en Cuerno et al. 1993b es que la solución $\check{R}_{\xi_1,\xi_2}$ de las condiciones de interpolación (5.24) para las representaciones de $C\widehat{H_q}(2)$ que satisfacen (5.28), es (salvo un cambio de base diagonal)

$$\check{R}_{\xi_1,\xi_2}(u) = \mathcal{P}R(u), \tag{5.29}$$

con $R(u)$ la dada en (5.5). Como vemos, la matriz $\check{R}_{\xi_1,\xi_2}$ que interpola entre dos irreps depende de tres parámetros de los cuatro que en total caracterizaban a éstas, al aparecer $\varphi_{1,2}$ siempre en la combinación afín $u = \varphi_1 - \varphi_2$. Dado que el límite hamiltoniano necesita de la identificación $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, resultan los dos parámetros mencionados (Γ, h) para el modelo XY unidimensional en campo magnético. En la obtención de (5.29) se ha utilizado la identidad[5] entre funciones elípticas

$$e(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{e(\varphi_1)\ (\mathrm{dn}(\varphi_1)+1)\ (\mathrm{dn}(\varphi_2)+1) - k^2\ e(\varphi_2)\ \mathrm{sn}(\varphi_1)\ \mathrm{sn}(\varphi_2)}{e(\varphi_2)\ (\mathrm{dn}(\varphi_1)+1)\ (\mathrm{dn}(\varphi_2)+1) - k^2\ e(\varphi_1)\ \mathrm{sn}(\varphi_1)\ \mathrm{sn}(\varphi_2)}.$$

5.2.3 Supersimetría $N = 2$.

Visto todo lo anterior, es interesante volver sobre el límite trigonométrico de $C\widehat{H_q}(2)$, en relación a la supersimetría $N = 2$ que se comentó más arriba. Si se toma $k = 0$ en (5.28), vemos que resulta $\lambda_x = \lambda_y$, o lo que es lo mismo, los elementos centrales de $C\widehat{H_q}(2)$ coinciden $E_x^{(j)} = E_y^{(j)} = \mathcal{E}^{(j)}$, donde $\mathcal{E}^{(j)}$ son los de $\mathcal{U}_q(gl\widehat{(1,1)})$. (5.5) se convierte entonces en la interpoladora de $\mathcal{U}_q(gl\widehat{(1,1)})$, o equivalentemente, la de $\mathcal{U}_q(s\widehat{l(2)})$ con $q^4 = 1$ para representaciones nilpotentes. Construyendo los generadores

$$\begin{aligned} Q_+ &= \frac{1}{2}\ (\Gamma_x^{(1)} + \mathrm{i}\ \Gamma_y^{(1)}), \qquad & Q_- &= -\frac{1}{2}\ (\mathrm{i}\Gamma_x^{(0)} + \Gamma_y^{(0)}), \\ \overline{Q}_+ &= \frac{1}{2}\ (-\mathrm{i}\Gamma_x^{(0)} + \Gamma_y^{(0)}), \qquad & \overline{Q}_- &= \frac{1}{2}\ (\Gamma_x^{(1)} - \mathrm{i}\ \Gamma_y^{(1)}), \end{aligned} \tag{5.30}$$

es sencillo ver que satisfacen la siguiente extensión central de un álgebra supersimétrica $N = 2$

$$\begin{aligned} &Q_\pm^2 = \overline{Q}_\pm^2 = \{Q_\pm, \overline{Q}_\pm\} = 0, \\ &\{Q_\pm, \overline{Q}_\pm\} = T_\pm, \\ &\{Q_+, Q_-\} = m\ z^2\ \ ,\ \ \{\overline{Q}_+, \overline{Q}_-\} = m\ z^{-2}, \end{aligned} \tag{5.31}$$

con $m = T_\pm = \left(\frac{\lambda-\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}\right)$. Ésta es la razón de que el límite trigonométrico de (5.5) aparezca como la parte $N = 2$ de la matriz S factorizable para el scattering de solitones en las teorías con supersimetría $N = 2$ arriba citadas: uno ha de imponer la conmutatividad de la matriz S con las simetrías del problema. La dimensión de los multipetes, junto con la anterior exigencia, fijan la forma de dicha contribución a la matriz S.

[5] Esta identidad es cierta en los límites trigonométrico ($k = 0$) e hiperbólico ($k = 1$). La hemos comprobado numéricamente de manera extensa en el caso elíptico general.

5.2.4 Cadena abierta invariante $CH_q(2)$.

En esta sección se estudia el límite hamiltoniano del modelo estadístico definido por la matriz (5.5) cuyo significado algebraico se ha elucidado en la primera parte del capítulo. Las condiciones de contorno que estamos interesados en considerar aquí son de nuevo las de cadena abierta. Dado que, según hemos visto en capítulos precedentes, dichas condiciones son las que permiten construir un hamiltoniano con la simetría cuántica no afín (independiente del parámetro espectral u que aparece en la matriz de pesos de Boltzmann), se estudian los términos de frontera necesarios para que el hamiltoniano (5.8) sea invariante bajo $CH_q(2)$. Veremos que las soluciones para las matrices $K_\pm(u)$ que satisfacen este requisito son de hecho las únicas soluciones diagonales para las ecuaciones de reflexión, sin existir la dependencia de parámetros arbitrarios que se encontró en el límite trigonométrico. De forma análoga a dicho caso, estas matrices tampoco dependen del campo magnético $h = \mathrm{cn}(\psi)$, pero sí que lo hacen (como para el 6V) del parámetro que mide la anisotropía en el sistema: aquí esencialmente k. De esta forma sus elementos de matriz resultan ser funciones elípticas de módulo k del parámetro espectral u, y son el primer ejemplo que conocemos de soluciones elípticas de las ecuaciones de reflexión; posteriormente, de Vega y González–Ruiz 1993 han visto la existencia de este tipo de soluciones también en el caso del modelo 8V de campo cero. Es interesante notar las diferencias del caso que aquí se estudia respecto al 8V de Baxter. En este último, no existen soluciones diagonales no constantes para las $K_\pm(u)$. Las soluciones no diagonales son no triviales en este sentido (sí que dependen de u), pero sus límites trigonométricos no conducen a cadenas abiertas invariantes bajo $\mathcal{U}_q(sl(2))$; es decir, las soluciones de Cherednik en el caso del modelo 6V no son el límite de soluciones correspondientes en el caso del 8V, sino que son puramente características del régimen trigonométrico. Todo lo contrario ocurre en el modelo 8V de fermiones libres: sólo existen dos soluciones diagonales para las matrices de reflexión, que no dependen de parámetros arbitrarios; conducen a hamiltonianos invariantes bajo un álgebra cuántica ($CH_q(2)$) y también sus límites trigonométricos ($\mathcal{U}_q(sl(2))$ para $q^4 = 1$). En resumen, para el caso de fermiones libres, las álgebras cuánticas relevantes en los casos elíptico y trigonométrico se relacionan de manera continua. Todo lo contrario del caso 8V de campo cero, en el que existe una diferencia brusca desde el punto de vista de las álgebras cuánticas entre el régimen elíptico, y el trigonométrico ó 6V. De nuevo la intuición que se gana de estos resultados apuntan en sentido negativo respecto al significado como interpoladora en un álgebra cuántica de la matriz (5.1) con la que comenzamos este capítulo.

Volviendo de forma específica al modelo de fermiones libres, la independencia respecto de parámetros arbitrarios en las soluciones diagonales que se dan más abajo por un lado, y la inexistencia de soluciones no diagonales en el trigonométrico por otro, nos hacen pensar que el hamiltoniano que se dé más abajo es el único integrable de cadena abierta para el modelo XY unidimensional con campo magnético.

Consideremos primero qué términos son necesarios para tener un hamiltoniano invariante $CH_q(2)$. La cadena unidimensional se construye colocando una copia de la representación (λ_x, λ_y) de $CH_q(2)$ sobre cada uno de los L sitios, dejando que en principio $\lambda_{x,y}$ tomen valores arbitrarios (pero idénticos para las L posiciones). Añadamos al hamiltoniano de cadena cerrada (5.8) un término de frontera arbitrario T. Si imponemos la condición

$$[H + T, \Delta(g)] = 0$$

con g cualquier generador de $CH_q(2)$, obtendremos el siguiente hamiltoniano de cadena abierta invariante

$$\begin{aligned} H_a &= \frac{1}{4\,\mathrm{sn}(\psi)} \left\{ \sum_{j=1}^{L-1} [(1+\Gamma)\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + (1-\Gamma)\sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + h(\sigma_j^z + \sigma_{j+1}^z)] + \right. \\ &+ \left. (\lambda_x(1+\Gamma) - h)\ \sigma_1^z + (\lambda_x^{-1}(1-\Gamma) - h)\ \sigma_L^z \right\}, \end{aligned} \tag{5.32}$$

siempre que se satisfaga la relación

$$\lambda_x\ (1+\Gamma) = \lambda_y\ (1-\Gamma), \tag{5.33}$$

que deja sólo un valor independiente para los casimires de la representación colocada sobre cada sitio de la cadena. De momento no hemos considerado nada más que las simetrías del hamiltoniano. Vayamos ahora con el problema de la integrabilidad.

Lo primero que hemos de analizar para construir el hamiltoniano de cadena abierta es, como se vio en el capítulo 2, las simetrías de la matriz $R(u)$. Fijando la restricción $\psi_1 = \psi_2 \equiv \psi$ en la matriz (5.5), se puede ver que posee las siguientes simetrías

$$\begin{array}{rl} \text{Regularidad} & R(0) = (1 - e^2(\psi))\ \mathcal{P}\ , \\ \text{Simetría P} & \mathcal{P}R(u)\mathcal{P} = R(u)\ , \\ \text{Simetría T} & R^{t_{12}}(u) = R(u)\ , \\ \text{Unitariedad} & R(u)R(-u) = \zeta(u)\ \mathbf{1}\ , \\ \text{Simetría de Cruce} & R^{t_1}(u)R^{t_1}(-u+4\mathcal{K}) = \tilde{\zeta}(u)\ \mathbf{1}, \end{array}$$

donde $\zeta(u)$ y $\tilde{\zeta}(u)$ son dos funciones escalares de u, irrelevantes en lo que sigue. $\mathcal{K}$ es la integral elíptica completa de primera especie, de módulo k. Así pues, las ecuaciones de reflexión que intentaremos resolver son las (3.8), (3.9), imponiendo, a la vista de (5.32), que las matrices $K_\pm(u)$ sean diagonales. El procedimiento para resolver (3.8) es el mismo que se indicó en el capítulo anterior en el contexto del caso $q^3 = 1$. Sin embargo, aquí no existe dependencia de parámetros arbitrarios, sino que obtenemos dos únicas soluciones diagonales, que se dan a continuación[6]

$$K_-(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{cn}(\frac{u}{2})\mathrm{dn}(\frac{u}{2}) \pm \mathrm{i}k'\mathrm{sn}(\frac{u}{2}) & \\ & \mathrm{cn}(\frac{u}{2})\mathrm{dn}(\frac{u}{2}) \mp \mathrm{i}k'\mathrm{sn}(\frac{u}{2}) \end{pmatrix},$$

[6]La ecuación para $K_+(u)$ se resuelve utilizando el parámetro de cruce: $K_+(u) = K_-(-u + 2\mathcal{K})$.

$$K_+(u) = \begin{pmatrix} k'^2 \frac{\mathrm{sn}(\frac{u}{2})}{\mathrm{dn}^2(\frac{u}{2})} \pm \mathrm{i}k' \frac{\mathrm{cn}(\frac{u}{2})}{\mathrm{dn}(\frac{u}{2})} & \\ & k'^2 \frac{\mathrm{sn}(\frac{u}{2})}{\mathrm{dn}^2(\frac{u}{2})} \mp \mathrm{i}k' \frac{\mathrm{cn}(\frac{u}{2})}{\mathrm{dn}(\frac{u}{2})} \end{pmatrix}. \tag{5.34}$$

k' es el módulo elíptico complementario ($k^2 + k'^2 = 1$). Los límites trigonométricos de estas matrices son precisamente las que dan invariancia del hamiltoniano bajo $\mathcal{U}_q(sl(2))$ en las nilpotentes λ para $q^4 = 1$, y los signos $\pm$ corresponden respectivamente a tomar allí la comultiplicación Δ ó la Δ'. La no existencia de parámetros libres en estas soluciones diagonales naturalmente impide escribirlas de una manera "baxterizada" análoga a (3.20). Otra propiedad interesante de estas soluciones elípticas es que guardan el "recuerdo" de las representaciones para q raíz de la unidad, o aquí equivalentemente, de la supersimetría $\mathcal{U}_q(gl(1,1))$, en la forma

$$\mathrm{Tr} K_+(0) = 0,$$
$$\mathrm{Tr}_0 \overset{0}{K_+}(0) H_{L0} = A \;\mathbf{1},$$

con A una cierta constante, y $H_{j,j+1}$ la derivada logarítmica de la matriz (5.5). Esto nos obliga a construir el hamiltoniano de la cadena abierta tomando la segunda derivada de la correspondiente matriz de transferencia de Sklyanin, según la prescripción que se dio en el capítulo 2. El resultado que se obtiene es

$$H_a = \frac{1}{4\,\mathrm{sn}(\psi)} \sum_{j=1}^{L-1} \left\{ (1+\Gamma)\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + (1-\Gamma)\sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + h(\sigma_j^z + \sigma_{j+1}^z) \pm \mathrm{i}k'\mathrm{sn}(\psi)(\sigma_1^z - \sigma_L^z) \right\}, \tag{5.35}$$

donde se ha omitido un término proporcional a la matriz identidad. Comparando con (5.32), vemos que la integrabilidad impone la condición adicional sobre el término de frontera T de que

$$T \propto (\sigma_1^z - \sigma_L^z),$$

lo cual a su vez restringe los valores de los elementos centrales que etiquetan la irrep de $CH_q(2)$, de manera que, necesariamente

$$\lambda_x = \frac{\mathrm{cn}(\psi) \pm \mathrm{i}k'\mathrm{sn}(\psi)}{1 + k\mathrm{sn}(\psi)}, \quad \lambda_y = \frac{\mathrm{cn}(\psi) \pm \mathrm{i}k'\mathrm{sn}(\psi)}{1 - k\mathrm{sn}(\psi)}. \tag{5.36}$$

Por supuesto, esta combinación satisface (5.33). Los signos $\pm$ en el término de frontera se corresponden con los $\pm$ en (5.36). La combinación $\mp$ en el hamiltoniano supone invariancia bajo $CH_q(2)$ usando la comultiplicación Δ'. Además, vemos que efectivamente este hamiltoniano posee el (4.19) como límite trigonométrico $k = 0$, $k' = 1$[7].

[7]Para comparar los factores globales, tener en cuenta la relación mencionada más arriba entre el parámetro espectral elíptico u y el que aparece en la matriz $R(u)$ nilpotente.

La relación de $\lambda_{x,y}$ con los parámetros de deformación α, β en $\mathcal{U}_{\alpha,\beta}(gl(1,1))$ es

$$\alpha = -\lambda_x, \quad \beta = -\lambda_y. \tag{5.37}$$

Recuérdese que α y β daban las deformaciones según las direcciones x e y, respectivamente. El hecho notado por Hinrichsen y Rittenberg 1992a, de que las deformaciones con más de dos parámetros de $\mathcal{U}(gl(1,1))$ son equivalentes a la $\mathcal{U}_{\alpha,\beta}(gl(1,1))$, pudiera estar relacionado con la inexistencia de más soluciones para las matrices $K_\pm(u)$ que den invariancia, que las dadas por (5.34).

La interpretación de casimires como parámetros de deformación y viceversa, ya se encontró en el caso trigonométrico al notar la equivalencia entre las nilpotentes λ de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ para $q^4 = 1$ y la superálgebra $\mathcal{U}_{\hat{q}}(gl(1,1))$ con $\hat{q} = \lambda$. Comprobamos aquí su validez en el caso elíptico. En el siguiente capítulo veremos aparecer de nuevo los valores (5.36) en el contexto de la matriz de transferencia triángulo (CTM).

En resumen, hemos mostrado que el hamiltoniano (5.35) proporciona los modelos XY de cadena abierta con campo magnético que son integrables e invariantes bajo $CH_q(2)$ en las representaciones dadas por (5.36). Como se vio en el capítulo anterior, la invariancia bajo un álgebra cuántica puede utilizarse para explorar por ejemplo analogías en el retículo de las simetrías de los modelos considerados en el límite continuo, o bien para estudiar otros aspectos algebraicos como el álgebra centralizadora, etc. En relación con esto último, Hinrichsen y Rittenberg 1992a han observado que la matriz dada por (5.35) en el caso $L = 2$ satisface una generalización del álgebra de Hecke[8]. Es el análogo elíptico del centralizador estudiado en el capítulo 3 para $q^4 = 1$. Sería interesante investigar esta álgebra, y en particular si podría conducir a la definición de algún tipo de invariante (que en principio dependería de dos parámetros (k, ψ)). Las hipotéticas soluciones constantes para las matrices $K_\pm$ que conduzcan al mismo hamiltoniano (5.35), podrían completar la estructura á la Turaev. Para analizar este punto sería necesario aplicar a la matriz (5.5) el cambio gauge adecuado, lo cual nos conduce a la pregunta sobre si es posible escribir una matriz *elíptica* equivalente a ella, de manera “baxterizada”.

[8]Existen además relaciones adicionales.

Capítulo 6

Matriz de Transferencia Triángulo

Aunque el sistema físico que se estudia en este capítulo continúa siendo el modelo de 8V de fermiones libres que se presentó en el anterior, merece la pena destacar suficientemente el punto de vista que vamos a adoptar ahora. Hasta aquí, para estudiar los modelos de vértices, hemos optado por un enfoque "fila a fila". La matriz de transferencia pasaba de una fila del retículo a la siguiente, y su límite hamiltoniano era el generador infinitesimal de dicha traslación "temporal". Como se mencionó en el capítulo 1, es posible considerar la evolución "diagonal" en el retículo. La observación tiene relevancia física, ya que, según se adelantó allí, el generador infinitesimal de ese tipo de transformaciones, H_{CTM}, se puede interpretar como el boost de Lorentz sobre el retículo. La matriz de transferencia que se construye es la que en el capítulo 1 denominamos de tipo "triángulo" (CTM), y su derivada logarítmica es el operador al que antes aludíamos. Aparte de este significado físico, H_{CTM} es susceptible de interpretación en el contexto de las álgebras de Lie (o sus deformaciones cuánticas) afines de Kač–Moody. En efecto, como se vio en el capítulo 1, H_{CTM} actúa como una derivada respecto del parámetro espectral u, el cual, bajo un punto de vista algebraico, no es sino el parámetro (afín) de las álgebras cuánticas afines. Éste fue un aspecto importante en el capítulo anterior para conseguir la correcta interpretación de la matriz $R(u)$ de Bazhanov–Stroganov como interpoladora en un álgebra de tipo afín. Precisamente en aquel contexto mencionamos la necesidad de encontrar un operador de derivación para poder calificar con propiedad a $\widehat{CH_q}(2)$ como álgebra afín. Tal operador introduce una gradación en el álgebra de dimensión infinita, que rompe una degeneración en principio asimismo infinita en la teoría de representaciones (Goddard y Olive 1986). Su actuación sobre los modos del álgebra de KM es

$$[d, J_n^a] = n\ J_n^a, \tag{6.1}$$

de forma que su espectro está dado por números enteros. Notar la semejanza de (6.1) con la actuación del generador L_0 del álgebra de Virasoro sobre el resto de modos del álgebra infinita–

dimensional:

$$[L_0, L_n] = -n\ L_n. \tag{6.2}$$

Ya se comentó en el capítulo 1 que el generador infinitesimal H_{CTM} de la CTM de Baxter posee un espectro de niveles equiespaciados en los modelos integrables. Vemos que reúne así las dos características esenciales para poder interpretarlo básicamente como la derivación en el álgebra cuántica afín. Tal identificación ha sido llevada a cabo con éxito en el caso del modelo de 6V (Davies et al. 1993). Así, es sencillo ver de manera formal que, definiendo por ejemplo

$$H^{6V}_{CTM} = -\frac{1}{q-q^{-1}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} j\ \{\sigma^x_j \sigma^x_{j+1} + \sigma^y_j \sigma^y_{j+1} + \Delta \sigma^z_j \sigma^z_{j+1}\},$$

se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned}&[H^{6V}_{CTM}, \Delta^{(\infty)}(E_i)] = \Delta^{(\infty)}(E_i), \quad [H^{6V}_{CTM}, \Delta^{(\infty)}(F_i)] = -\Delta^{(\infty)}(F_i),\\ &[H^{6V}_{CTM}, \Delta^{(\infty)}(K_i)] = 0, \quad i = 0, 1,\end{aligned}$$

con $\{E_i, F_i, K_i\}_{i=0}^{1}$ los generadores del álgebra cuántica afín $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$, y $\Delta^{(\infty)}$ la comultiplicación definida sobre una cadena doblemente infinita (todas estas manipulaciones formales encuentran una definición precisa en la referencia dada). Así que, si definimos

$$d \equiv \frac{1}{2}\left(H^{6V}_{CTM} - \mathcal{S}^z\right) \tag{6.3}$$

(donde $\mathcal{S}^z$ es el operador de espín total $\mathcal{S}^z \equiv \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \sigma^z_j$), d satisface las relaciones propias de la derivación en $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ en la gradación principal:

$$[d, E_i] = \delta_{i,0}\ E_i, \quad [d, F_i] = -\delta_{i,0}\ F_i, \quad [d, K_i] = 0, \quad i = 0, 1.$$

Es posible incluso escribir el hamiltoniano fila a fila en términos de la derivación (6.3) como

$$H_{6V} \propto \mathcal{T}\ d\ \mathcal{T}^{-1} - d$$

con $\mathcal{T}$ el operador de traslación de un paso sobre la cadena

$$\mathcal{T}\ \vec{\sigma}_j \mathcal{T}^{-1} \equiv \vec{\sigma}_{j-1}.$$

Es interesante destacar en las anteriores expresiones el hecho de que la identificación entre el generador infinitesimal de la CTM, H_{CTM}, y la derivación en el álgebra cuántica afín, d, tiene lugar "a través" del operador de espín total: éste proporciona un número cuántico conservado en los modelos de tipo 6V, no así en los de tipo 8V, según se observó más arriba.

Visto lo anterior, y dado que en el capítulo 5 descubrimos una álgebra cuántica de tipo afín para el modelo 8V de fermiones libres, resulta natural intentar completar la estructura buscando el operador de derivación correspondiente en relación con el generador infinitesimal de la CTM para este modelo. El objeto del presente capítulo es estudiar el operador H_{CTM} desde el punto de vista de su espectro[1]. Esto es, utilizando técnicas bien adaptadas a hamiltonianos bilineales en operadores fermiónicos, se demuestra que, en el caso elíptico genérico (restringiéndonos a valores reales para los parámetros k, ψ), dicho operador posee un espectro efectivamente dado por números enteros. Éste es el primer paso en la determinación del operador d para el álgebra $C\widehat{H_q}(2)$. Completar el proceso supondría dar con el análogo de (6.3) para este modelo de 8V. Un aspecto interesante de este programa sería la posterior utilización de sus resultados para calcular funciones de correlación utilizando el método algebraico de Davies et al. 1993 en este modelo de fermiones libres. Aunque dichas correlaciones se conocen ya (Barouch y McCoy 1971, Vaidya y Tracy 1978) en ciertas regiones de parámetros, sería interesante ver en detalle en este modelo sencillo cómo funciona dicho método basado en la teoría de álgebras afines cuánticas, así como comprender la cancelación de divergencias en los correladores de términos invariantes bajo el álgebra cuántica (Hinrichsen y Rittenberg 1993). Por otro lado, la interpretación de d como una versión sobre el retículo del generador L_0 de Virasoro, permitió la definición de un análogo discreto del álgebra de Virasoro, incluso en el régimen masivo de la teoría; esto lo consiguieron Itoyama y Thacker 1989 para el punto de fermiones libres ($\gamma = \pi/2$) del modelo 8V de Baxter. Dada la relación de $C\widehat{H_q}(2)$ con álgebras supersimétricas, se podría especular con que H_{CTM} permitiera introducir en nuestro caso el análogo discreto y masivo de un álgebra quiral más amplia que la de Virasoro.

El plan del capítulo es el siguiente. Tras la anterior introducción, nos centramos en el modelo 8V de fermiones libres. Se introducen las técnicas básicas para su diagonalización y se comentan los casos resueltos hasta ahora en la literatura: son diversos límites en los que esencialmente es aplicable la teoría de polinomios ortogonales. Una vez introducido el diagrama de fases del modelo XY en campo magnético, se plantea el caso genérico resuelto en Cuerno 1993, y que es el objeto de este capítulo. La diagonalización exacta de (6.4) se aborda utilizando funciones generatrices. La solución pasa por resolver una cierta integral elíptica, para cuyo significado sugeriremos una posible interpretación. Los detalles de su resolución pueden encontrarse al final del capítulo en forma de apéndice. El resultado es un conjunto equiespaciado de autovalores, que apunta en sentido favorable hacia la interpretación de H_{CTM} en términos de algún operador tipo derivación. El efectivo significado de (6.4) como derivación en el contexto de simetrías maestras ya ha sido establecido con anterioridad por Araki 1990. Finalmente, se compara el resultado analítico con el obtenido de forma numérica, que lo confirma aceptablemente, y acabaremos con algunos comentarios.

[1] El espectro del hamiltoniano fila a fila para el modelo XY en campo magnético se conoce hace mucho tiempo, ver Lieb et al. 1961 y Katsura 1962.

6.1 Modelo 8V de fermiones libres.

El problema de la diagonalización de un operador como el H_{CTM} del modelo elíptico de fermiones libres, posee además interés por sí mismo. Es un hamiltoniano en el que los parámetros crecen linealmente con el tamaño de la cadena:

$$H_{CTM} = \frac{1}{4\,\mathrm{sn}(\psi)} \sum_{j=1}^{\infty} j\ \{(1+\Gamma)\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + (1-\Gamma)\sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + h(\sigma_j^z + \sigma_{j+1}^z)\}, \tag{6.4}$$

y en su diagonalización en diversos límites aparecen familias de polinomios ortogonales (Chihara 1978):

En la referencia Lieb et al. 1961, se estudia la diagonalización de hamiltonianos de la forma

$$H = \sum_{i,j=1}^{L} \{c_i^\dagger A_{i,j} c_j + \frac{1}{2}(c_i^\dagger B_{i,j} c_j^\dagger + \text{c.c.})\}, \tag{6.5}$$

donde c.c. denota el conjugado complejo, las matrices de coeficientes reales $A_{i,j}$ y $B_{i,j}$ son simétrica y antisimétrica respectivamente — de forma que (6.5) sea un hamiltoniano hermítico — y $c_j^\dagger$, c_j son operadores de creación y destrucción de fermiones que verifican las relaciones canónicas de anticonmutación

$$\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{i,j}, \quad \{c_i, c_j\} = \{c_i^\dagger, c_j^\dagger\} = 0. \tag{6.6}$$

Definamos una nueva matriz $M \equiv A - B$. Si diagonalizamos el producto

$$(A - B)(A + B) = MM^t, \tag{6.7}$$

es posible probar, utilizando esencialmente una transformación de Bogoliubov, que cada autovalor de (6.7) es el cuadrado de un autovalor de (6.5). En el caso de (6.4), la transformación de Jordan–Wigner permite construir unos operadores fermiónicos como los de (6.6) a partir de las matrices de Pauli, de la siguiente manera[2]

$$c_j \equiv \frac{1}{2} e^{\frac{\pi \mathrm{i}}{4} \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_k^+ \sigma_k}\ \sigma_j^-, \quad c_j^\dagger \equiv \frac{1}{2} \sigma_j^+\ e^{-\frac{\pi \mathrm{i}}{4} \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_k^+ \sigma_k}. \tag{6.8}$$

La expresión del hamiltoniano (6.4) en términos de estos fermiones queda, para una cadena de longitud L, y salvo términos proporcionales a la identidad,

$$H_{CTM} = \frac{1}{2\,\mathrm{sn}(\psi)} \sum_{j=1}^{L-1} j\ \{c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j + \Gamma(c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger + c_{j+1} c_j) + h(c_j^\dagger c_j + c_{j+1}^\dagger c_{j+1})\}, \tag{6.9}$$

[2] Es curioso observar el gran parecido de esta transformación con la comultiplicación de irreducibles de $\mathcal{U}_q(gl(1,1))$.

k	h	Γ	Descripción
0	$\cos(\psi)$	0	Límite trigonométrico (modelo XX con campo magnético)
1	$1/\mathrm{ch}(\psi)$	$\neq 0$	Límite hiperbólico (línea de desorden)
$\frac{1}{\mathrm{sn}(\psi)}$	$\mathrm{cn}(\psi)$	1	Modelo de Ising
k	1	0	Modelo Isótropo, campo crítico
k	0	k	8V campo cero (Baxter, $\gamma = \pi/2$)

Tabla 6.1: Límites asocidos a polinomios ortogonales.

de forma que M en (6.7) es una matriz tridiagonal, y está dada por

$$M = \frac{1}{4\,\mathrm{sn}(\psi)}\times$$
$$\times \begin{pmatrix} h(0+1) & \gamma_- & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_+ & h(1+2) & 2\gamma_- & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma_+ & h(2+3) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (L-2)\gamma_+ & h(L-1+L-2) & (L-1)\gamma_- \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (L-1)\gamma_+ & h(L-1) \end{pmatrix},$$

donde $\gamma_\pm \equiv 1 \pm \Gamma$. (6.7) es entonces una matriz pentadiagonal. Es sencillo ver que la correspondiente ecuación de autovalores en general supone recurrencias a 5 términos para las componentes de los autovectores, que son bastante complicadas de resolver; con este fin recurriremos más abajo a la definición de funciones generatrices, ya que para ellas las ecuaciones se convierten en diferenciales, y resultan más fácilmente tratables.

Las recurrencias a 5 términos mencionadas se convierten en ecuaciones con sólo tres términos en toda una serie de casos notables, como son los que se especifican en la tabla[3] 5.1. En Eckle y Truong 1993b se muestra que, de hecho, también en el caso anisótropo que nosotros consideramos las soluciones de las recurrencias a 5 términos son polinomios, aunque no está aún probado que formen una familia ortogonal. Dicha referencia ha aparecido de forma simultánea e independiente de Cuerno 1993. La parametrización que en ella se usa permite ir más allá del caso de k, ψ reales que aquí consideramos. No obstante, probablemente sea posible recuperar sus resultados contemplando la extensión a valores complejos de nuestros parámetros.

Para precisar con más claridad el modelo físico que se desea estudiar en lo que sigue, especialmente en relación a los casos particulares del mismo expuestos en la tabla 5.1, es significativo mencionar cuál es su diagrama de fases. En la parametrización dada por (Γ, h) tomamos

[3] Ver en Eckle y Truong 1993b las referencias en las que se muestra que las soluciones de las correspondientes recurrencias a 3 términos están efectivamente dadas por alguna familia de polinomios ortogonales.

Figura 6.1: Diagrama de fases del modelo XY con campo magnético.

$0 \leq \Gamma \leq 1$, y $h \geq 0$; el diagrama estudiado en la literatura citada más arriba se muestra en la figura 5.1. Si consideramos valores reales de ψ, k, tales que

$$0 \leq h < 1, \quad 0 < k \leq 1, \tag{6.10}$$

eso supone

$$0 \leq \Gamma \leq 1,$$

Se excluyen explícitamente de nuestro análisis los casos isótropos trigonométrico ($k = \Gamma = 0$) y de campo crítico ($h = 1 \Rightarrow \Gamma = 0$), ya que en ambos el sistema es crítico y el espectro de (6.4) colapsa, en el sentido de que el espaciado entre niveles se anula como $1/\ln L$, para valores grandes del tamaño del sistema L (Peschel y Truong 1987). Por ejemplo, en el caso del punto de fermiones libres del modelo 8V de Baxter, este límite corresponde a la desaparición de una de las periodicidades de la variable espectral que vive sobre el toro en (5.1). Sin embargo, el otro periodo sobrevive al límite, y el álgebra de Virasoro que se construye teniéndolo en cuenta (y teniendo como modo L_0 al generador de la CTM) es la que se convierte en la de la Teoría Conforme (Itoyama y Thacker 1989).

Así pues, el caso genérico que vamos a estudiar se trata de un modelo anisótropo y masivo, en presencia de un campo magnético que no alcanza su valor crítico. Es interesante que dentro de este rango de valores para los parámetros se incluye el caso conocido como línea de desorden, que es el círculo

$$\Gamma^2 + h^2 = 1,$$

en el que el sistema se simplifica de manera drástica (Truong y Peschel 1990), y que en nuestra parametrización corresponde al límite hiperbólico $k = 1$[4].

6.2 Diagonalización de H_{CTM}.

Consideremos ahora el hamiltoniano (6.4) para una cadena semiinfinita $L \to \infty$. Dado que el modelo es de fermiones libres, resulta conveniente plantear su diagonalización partiendo de la expresión en términos de operadores fermiónicos. Sin embargo, para lo que sigue, en lugar de (6.6) resulta más conveniente considerar los operadores

$$\begin{gathered} \tau_j^{x,y} \equiv \tfrac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi \mathrm{i}}{2} \sum_{k=1}^{j-1} (\sigma_k^z - 1)} \sigma_j^{x,y}, \\ \left\{ \tau_j^a, \tau_k^b \right\} = \delta_{jk} \delta_{ab}. \end{gathered} \tag{6.11}$$

En términos suyos queda

$$H_{CTM} = -\frac{\mathrm{i}}{2\ \mathrm{sn}(\psi)} \sum_{j=1}^{\infty} j \left\{ (1+\Gamma) \tau_j^y \tau_{j+1}^x - (1-\Gamma) \tau_j^x \tau_{j+1}^y + h(\tau_j^x \tau_j^y + \tau_{j+1}^x \tau_{j+1}^y) \right\}.$$

Lo que buscamos es escribir este operador como una forma diagonal en operadores fermiónicos que sean combinaciones lineales de los (6.11)

$$\psi(l) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ A_{l,j}^- \tau_j^x + A_{l,j}^+ \tau_j^y \right\},$$

donde l es un índice que etiqueta los autoestados, y de manera que se satisfaga la ecuación de autovalores

$$[H_{CTM}, \psi(l)] = \lambda_l\ \psi(l). \tag{6.12}$$

La relación (6.12) supone el siguiente sistema de ecuaciones para los coeficientes $\{A_{l,j}^{\pm}\}$:

$$\gamma_{\pm}(m-1) A_{l,m-1}^{\pm} - h(2m-1) A_{l,m}^{\pm} + \gamma_{\mp} m A_{l,m+1}^{\pm} = \mp 2\ \mathrm{i}\ \mathrm{sn}(\psi)\ \lambda_l A_{l,m}^{\mp}, \tag{6.13}$$

donde $m = 1, 2, \ldots$ Si sustituyéramos una de las (6.13) en la otra, se obtendrían sendas ecuaciones de recurrencia para las familias de coeficientes $\{A_{l,m}^+\}$, $\{A_{l,m}^-\}$ que involucran en ambos casos (para l fijo) los 5 coeficientes $m \pm 2, m \pm 1, m$. Esta recurrencia es la misma que se

[4]Sería interesante ver si en el mencionado límite la matriz $R(u)$ de Bazhanov y Stroganov se convierte en la matriz 8V hiperbólica y de fermiones libres de Sogo et al. 1982, que en la clasificación de estos autores agota junto con la matriz de Baxter y la de BS, las posibilidades de modelos de ocho vértices que sean integrables.

obtenía para los coeficientes de los autovectores de la matriz MM^t. Como aquélla, es posible resolverla utilizando polinomios ortogonales en los casos particulares de los parámetros, para los que la recurrencia se “trunque” a 3 términos. Sin embargo, deseamos resolver el caso anisótropo general; es conveniente entonces trasladar la discusión a las funciones generatrices de los coeficientes $\{A^{\pm}_{l,m}\}$ (los polinomios ortogonales, en los casos en que así resulten):

$$A^{\pm}_l(t) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} t^j \; A^{\pm}_{l,j} \tag{6.14}$$

Para ellas las ecuaciones (6.13) se convierten en ecuaciones diferenciales en la variable t:

$$(\gamma_{\pm}t^2 - 2ht + \gamma_{\mp})\frac{dA^{\pm}_l(t)}{dt} + (h - \gamma_{\mp}t^{-1})A^{\pm}_l(t) = \mp 2 \text{ i } \mathrm{sn}(\psi)\lambda_l A^{\mp}_l(t). \tag{6.15}$$

Si introducimos los factores integrantes

$$f_{\pm}(t) = \frac{t}{(\gamma_{\pm}t^2 - 2ht + \gamma_{\mp})^{1/2}} \tag{6.16}$$

y las funciones $\alpha^{\pm}_l(t)$ de forma que

$$A^{\pm}_l(t) = \alpha^{\pm}_l(t) f_{\pm}(t), \tag{6.17}$$

(6.15) se convierte en el sistema

$$(\gamma_+ t^2 - 2ht + \gamma_-)^{1/2}(\gamma_- t^2 - 2ht + \gamma_+)^{1/2} \; \frac{d\alpha^{\pm}_l}{dt} = \mp 2 \text{ i } \mathrm{sn}(\psi) \; \lambda_l \; \alpha^{\mp}_l(t). \tag{6.18}$$

El cambio de variable

$$s = 2\mathrm{sn}(\psi) \int \frac{dt}{(\gamma_+ t^2 - 2ht + \gamma_-)^{1/2}(\gamma_- t^2 - 2ht + \gamma_+)^{1/2}} \tag{6.19}$$

convierte (6.18) en un sistema extremadamente sencillo:

$$\frac{d\alpha^{\pm}_l}{ds} = \mp \text{i } \lambda_l \alpha^{\mp}_l(s),$$

cuya solución está dada por exponenciales:

$$\begin{aligned} \alpha^{+}_l(s) &= a^{(l)}_1 e^{s\lambda_l} + a^{(l)}_2 e^{-s\lambda_l}, \\ \alpha^{-}_l(s) &= \text{i}(a^{(l)}_1 e^{s\lambda_l} - a^{(l)}_2 e^{-s\lambda_l}). \end{aligned} \tag{6.20}$$

En (6.20) $a^{(l)}_{1,2}$ son constantes de integración por determinar. Debido a que en la definición de $A^{\pm}_l(t)$ tenemos la libertad de fijar arbitrariamente una constante global, nos interesa tan sólo el cociente $\gamma^{(l)} = a^{(l)}_2/a^{(l)}_1$. Formalmente hemos hallado la solución para las funciones generatrices. La tarea que nos queda por completar es resolver explícitamente el cambio de variables (t, s) que se ha realizado más arriba, y fijar las constantes de integración.

Sobre la integral (6.19) podemos hacer algún comentario. Se trata de una integral elíptica de primera especie en la que el denominador del integrando posee cuatro ceros distintos, que aparecen en parejas de complejos conjugados:

$$\frac{\mathrm{cn}(\psi) \pm \mathrm{i}k'\mathrm{sn}(\psi)}{1 + k\mathrm{sn}(\psi)}, \qquad \frac{\mathrm{cn}(\psi) \pm \mathrm{i}k'\mathrm{sn}(\psi)}{1 - k\mathrm{sn}(\psi)}. \tag{6.21}$$

Estos valores ya aparecieron en el capítulo anterior, como los que habían de tomar los casimires $\lambda_{x,y}$ en la irrep de $CH_q(2)$ colocada en cada sitio de la cadena invariante, estando el signo $\pm$ del numerador relacionado con tomar la comultiplicación Δ, o bien la Δ'. Es interesante comprobar que cualquiera de los casos particulares recogidos en la tabla 5.1 convierte (6.19) en una integral mucho más sencilla: o bien el denominador tiene un número menor de ceros, y la integral se resuelve en términos de funciones elementales, o bien los ceros se disponen de una manera más sencilla. Por ejemplo, en el caso de campo $h = 0$, los ceros forman dos parejas de complejos conjugados, que son valores inversos una respecto de la otra:

$$\pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}, \qquad \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}$$

En este caso la solución de (6.19) es

$$t = \mathrm{i}\sqrt{\tilde{k}}\,\mathrm{sn}(u, \tilde{k}),$$

donde $\tilde{k} = \frac{1-k}{1+k}$. Si consideramos el caso trigonométrico, los ceros del denominador en (6.19) no son sino el parámetro nilpotente y su inverso $\lambda^{\pm 1} = e^{\pm \mathrm{i}\psi}$. Aquí la solución se escribe en términos de funciones trigonométricas:

$$s = \frac{1}{\mathrm{sen}(\psi)}\mathrm{arctg}\left(\frac{t - \cos(\psi)}{\mathrm{sen}(\psi)}\right), \tag{6.22}$$

o equivalentemente

$$e^{\mathrm{i}(s-\psi)} = \frac{e^{\mathrm{i}\psi} - t}{t\, e^{\mathrm{i}\psi} - 1}. \tag{6.23}$$

Si escribimos $t = e^{\mathrm{i}k}$, la transformación (6.23) es precisamente la que relaciona el cuasimomento k, que es la variable conjugada (Fourier) de la posición sobre la cadena unidimensional con la que se construye el Ansatz de Bethe coordenado, con la rapidez $s - \psi$, variable en términos de la cual las ecuaciones de Bethe adquieren la forma "en diferencias" que se vio por ejemplo en el capítulo 3. La transformación (6.19) puede verse que tiene una interpretación análoga como transformación rapidez–cuasimomento por ejemplo en el caso (elíptico) de campo cero (Itoyama y Thacker 1989). Estos casos límite presentan a s esencialmente como la variable respecto de la cual H_{CTM} actuaría como una derivación (en $C\widehat{H_q}(2)$).

Para resolver la integral (6.19) en el caso anisótropo genérico, un cambio adecuado resulta ser

$$y = \frac{\gamma_+ t^2 - 2ht + \gamma_-}{\gamma_- t^2 - 2ht + \gamma_+} \equiv \frac{N}{D}. \tag{6.24}$$

Nótese que no es un buen cambio en el límite trigonométrico, ya que en tal caso $\gamma_\pm = 1$ y el miembro de la derecha se hace idénticamente constante. Sin embargo, ya vimos cómo se resolvía la integral en dicho caso particular. Los detalles de la resolución de (6.19) en el caso general se dejan para el apéndice al final del capítulo. Aquí nos interesa saber que dicho cálculo tiene como resultado

$$s = \frac{1}{k'} \int_y^{y_+} \frac{dy}{(y(y_+ - y)(y - y_-))^{1/2}}, \tag{6.25}$$

donde $y_+ = \frac{1+k}{1-k}$. Ésta es ya una integral elíptica de primera especie escrita en forma estándar, y tiene como resultado

$$s = \frac{2}{(1+k)} \mathrm{tn}^{-1} \left[\left(\frac{1+k}{1-k} \right)^{1/2} \frac{t\, r_- - r_+}{t\, r_+ - r_-}, \frac{2k^{1/2}}{1+k} \right], \tag{6.26}$$

donde $r_\pm = (1 \pm \mathrm{sn}(\psi))^{1/2}$ y $\mathrm{tn}^{-1}(u,k)$ es la función elíptica inversa tn^{-1} de módulo k. Dentro del rango de parámetros que se está considerando, aparentemente en el límite hiperbólico $k = 1$ parece existir una singularidad en (6.26). Sin embargo, si se toma dicho límite en (6.19) es sencillo ver que de hecho la integral se resuelve en términos de funciones hiperbólicas inversas, de modo que la singularidad no es más que aparente.

Una vez resuelto el cambio de variable, queda por considerar la cuestión de las condiciones de contorno. Aquí, siguiendo a Davies 1988, el requisito relevante es que las funciones generatrices (6.14) den origen, en el límite termodinámico supuesto, a estados normalizables. Para esto los coeficientes $\{A^\pm_{l,j}\}$ han de ser de cuadrado integrable. Pediremos que las (6.14) estén libres de singularidades dentro de círculo unidad $|t| \leq 1$. De los ceros (6.21) sólo los

$$c_\pm \equiv \frac{\mathrm{cn}(\psi) \pm \mathrm{i}k'\mathrm{sn}(\psi)}{1 + k\mathrm{sn}(\psi)} \tag{6.27}$$

están dentro de este círculo. Imponiendo que el numerador de la función $A^+_l(t)$ se anule en dichos puntos, quedan fijadas $\gamma^{(l)}$ y λ_l. Si utilizamos finalmente que

$$s(c_\pm) = 2(\mathcal{K} \pm \frac{\mathrm{i}}{2}\mathcal{K}'), \tag{6.28}$$

se obtiene el espectro de H_{CTM}:

$$\lambda_l = \frac{\pi l}{2\mathcal{K}'}, \quad l = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6.29}$$

donde $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ son las integrales elípticas completas de primera especie, de módulos k y k' respectivamente El intercambio entre operadores fermiónicos $c_j \leftrightarrow c_j^\dagger$ se puede ver que equivale

Figura 6.2: Autovalores más bajos de M' para $h = 0.5$ y anisotropía variable. Las líneas son meramente auxiliares.

al $\lambda_l \leftrightarrow -\lambda_l$, y la elección hecha en (6.29) supone que el estado fundamental de H_{CTM} es el autoestado maximal de la matriz de transferencia $A_n(u)$. El resultado (6.29) recupera los encontrados previamente en la literatura. En los casos críticos tales como el límite trigonométrico ($k \to 0 \Rightarrow \mathcal{K}' \to \infty$) o el de campo crítico ($h = 1 \Rightarrow \mathrm{sn}(\psi) = 0$) el espectro colapsa a cero, según lo esperado por invariancia conforme. El análisis detallado de tamaño finito revela asimismo en dichos casos una estructura de niveles equiespaciados para el espectro (Truong y Peschel 1990; Eckle y Truong 1992).

Finalmente, nos gustaría presentar alguna confirmación numérica del resultado (6.29). Lo más sencillo resulta evaluar los autovalores $\{(4\mathrm{sn}(\psi)\lambda_l)^2\}$ de la matriz LSM $M'M'^t$, con $M' = 4\mathrm{sn}(\psi)M$. La hemos diagonalizado numéricamente para dimensiones hasta $L = 500$, y los resultados para los autovalores más bajos están en perfecto acuerdo con la expresión (6.29) para cualesquiera valores de (h, k) en los intervalos considerados. En la figura 5.2 se muestran los autovalores más bajos para campo magnético fijo $h = 0.5$; se ha variado la anisotropía Γ cambiando el módulo elíptico k. Los conjuntos de autovalores para cada valor de k se disponen con bastante aproximación sobre rectas, y existe un buen ajuste de la pendiente teórica $C(\psi, k) \equiv 2\pi|\mathrm{sn}(\psi)|/\mathcal{K}'$. Esto se muestra asimismo en la tabla 5.2. La convergencia empeora para valores pequeños tanto de k como de ψ, ya que ambos suponen acercarnos al límite isótropo $\Gamma = 0$, que es crítico para valores de $h \leq 1$ según se comentó más arriba.

k	h	$C(\psi,k)_{\text{exacto}}$	$C(\psi,k)_{\text{numérico}}$
10^{-2}	0.5	0.908	0.91
0.1	0.5	1.47238	1.47238
1	0.5	3.46410	3.46410
0.5	0.1	2.89898	2.89898
0.5	0.5	2.52324	2.52324
0.5	0.999	0.1302	0.1304

Tabla 6.2: Valores exactos y numéricos de $C(\psi,k)$.

En conclusión, hemos probado que el generador infinitesimal de la CTM para el modelo 8V de fermiones libres posee un espectro de niveles equiespaciados, también en el caso anisótropo más general. De acuerdo con lo visto hasta aquí es natural entonces esperar su relación con un operador de derivación en el álgebra cuántica afín $C\widehat{H_q}(2)$. La variable respecto de la cual H_{CTM} supone traslaciones infinitesimales estaría relacionada con la rapidez s definida por el cambio (6.19). La continuación del trabajo expuesto hasta aquí habría de pasar necesariamente por la aclaración de este punto. Aparte de las cuestiones que quedan abiertas en este contexto, y que se comentaron en la introducción de este capítulo, podríamos citar otras interesantes y que se han suscitado al hilo de la diagonalización de H_{CTM}. Una cuestión técnica es la demostración de la ortogonalidad y la completitud de la base de autoestados que se han generado aquí. Esto supondría probablemente utilizar identidades entre funciones elípticas (ver Davies 1988). Otro aspecto quizá relacionado con éste es la relación de los coeficientes $\{A_{l,j}\}$ con polinomios ortogonales. De hecho, Eckle y Truong 1993b han probado que se trata de una familia de polinomios que generalizan los polinomios ortogonales de tipo elíptico de Carlitz, pero no está aún probada la ortogonalidad. Quizá fuese útil en este sentido la teoría de polinomios ortogonales q–deformados (véase por ejemplo Koornwinder 1990).

6.3 Apéndice: Cálculo de la integral (6.19).

En este apéndice se dan algunos detalles del cálculo que conduce a la expresión (6.26), y que resuelve de esta manera la transformación rapidez–cuasimomento (6.19) en el caso anisótropo general. Seguimos muy de cerca la referencia Greenhill 1892.

Consideremos el cambio (6.24). Por un lado, los valores de t para los que se satisface la condición de extremo $dy/dt = 0$ verifican

$$t^2 h(\gamma_- - \gamma_+) + t(\gamma_+^2 - \gamma_-^2) + h(\gamma_- - \gamma_+) = 0. \tag{6.30}$$

Pero los extremos también se caracterizan por que, sobre ellos, si se resuelve t en función de y, la solución ha de ser única, lo cual sólo ocurre si:

$$h^2(1-y)^2 = (\gamma_+ y - \gamma_-)(\gamma_- y - \gamma_+). \tag{6.31}$$

Llamemos y_+ e y_- a los valores máximo y mínimo de y respectivamente, y $t_\pm$ a los valores de t para los que se alcanzan. Gracias a (6.31), en ellos se cumplen las relaciones

$$y_\pm = \frac{\gamma_+ t_\pm - h}{\gamma_- t_\pm - h} = \frac{\gamma_- - h t_\pm}{\gamma_+ - h t_\pm}. \tag{6.32}$$

Éstas, junto con la (6.30), bastan para probar que

$$y_+ - y = \frac{(\gamma_- y_+ - \gamma_+)(t_+ - t)^2}{D}, \quad y - y_- = \frac{(\gamma_+ - \gamma_- y_-)(t - t_-)^2}{D}, \tag{6.33}$$

donde D se definió en (6.24). Finalmente, las relaciones anteriores permiten escribir

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2h(\gamma_+ - \gamma_-)(t_+ - t)(t - t_-)}{D^2}. \tag{6.34}$$

Siendo la integral que deseamos evaluar

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{N\ D}}, \tag{6.35}$$

las (6.33) y (6.34) permiten escribirla como

$$I = \frac{\sqrt{(\gamma_- y_+ - \gamma_+)(\gamma_+ - \gamma_- y_-)}}{2h(\gamma_+ - \gamma_-)} \int \frac{dy}{\sqrt{y(y_+ - y)(y - y_-)}}. \tag{6.36}$$

Para los valores de k contemplados en (6.10), se tiene que

$$y_\pm = \frac{1 \pm k}{1 \mp k}, \tag{6.37}$$

así que finalmente la integral I queda en la siguiente forma estándar:

$$I = \frac{1}{2k' \mathrm{sn}(\psi)} \int_y^{y_+} \frac{dy}{(y(y_+ - y)(y - y_-))^{1/2}}. \tag{6.38}$$

Utilizando $y_+ > y \geq y_- > 0$, se llega finalmente al resultado (6.26) (Byrd y Friedman 1971).

Capítulo 7

Conclusiones

A lo largo de la exposición de la presente memoria se han planteado y resuelto, al menos de forma parcial, diversas cuestiones en el campo de los modelos de vértices y sus relaciones con los grupos cuánticos. También han quedado abiertas otras, unas como extensiones directas del trabajo presentado aquí, y otras de forma más especulativa. En los capítulos correspondientes ya se mencionaron algunas. A modo de resumen, nos gustaría citar a continuación las más significativas, junto con otras consideraciones de carácter general.

En los captulos 2 y 3, se consideraron las condiciones de frontera que se pueden introducir en los modelos de vrtices preservando el requisito de integrabilidad, fundamentalmente con la idea de encontrar nuevos modelos de cadena abierta explícitamente invariantes bajo las álgebras cuánticas. Vimos primero la posibilidad de interpretar las soluciones constantes de las ecuaciones de reflexión como elementos de las álgebras cuánticas de tipo no afín. Aunque sólo se consideraron los ejemplos de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ en las representaciones fundamental y nilpotente $q^4 = 1$, se apuntó la verosimilitud de la interpretación en el caso de otras álgebras cuánticas. Al establecer la relación entre estas soluciones constantes con las soluciones diagonales más generales en cada caso, vimos que éstas se podían escribir de una forma "baxterizada". Sería interesante entenderlas en el contexto de las álgebras de tipo cuadrático definidas por las ecuaciones de reflexión independientes de parámetro espectral (Kulish y Sklyanin 1992)[1]. Es posible que este tema estuviera conectado con la hipotética relación entre las ecuaciones de reflexión y las álgebras cuánticas afines (ACA). Si este punto se comprendiera adecuadamente, ello podría quizá permitir la construcción de modelos explícitamente invariantes bajo ACA, sin la necesidad que existe en el modelo XXZ de ir al límite de cadena infinita (ver capítulo 5). Para acabar con lo referente al significado algebraico de las matrices de reflexión, nos gustaría volver a mencionar las $K_{\pm}(u)$ elípticas que se encontraron en el capítulo 4. Sería muy interesante comprobar la existencia de soluciones constantes que condujesen al mismo hamiltoniano de cadena abierta

[1] Simultáneamente a la finalización de esta memoria, ha aparecido la referencia Fu et al. 1993, en la que se resuelve este punto en el caso de matrices $\check{R}$ con 2 autovalores.

invariante $CH_q(2)$, y estudiarlas en el contexto de la generalización de Hecke que supone dicho hamiltoniano, teniendo en mente lo aprendido en el capítulo 2.

Pero las ecuaciones de reflexión tienen además importantes consecuencias de tipo físico, ya que son las condiciones para construir una cadena de espines abierta que sea integrable, y existen casos en los que estas condiciones de contorno pueden modificar la clase de universalidad en sistemas críticos. En el capítulo tercero comprobamos cómo los términos de frontera que proporcionan (en particular los que dan invariancia del hamiltoniano bajo las álgebras cuánticas) suponen efectivamente cambios de importancia en las propiedades físicas del modelo respecto a las que poseía en el caso de cadena cerrada: así, se presentó el primer cálculo analítico de una extensión central para cadena abierta invariante ($\mathcal{U}_q(sl(2))$ en representación regular de espín 1) a excepción del caso $s = 1/2$ resuelto por Hamer et al. 1987, con el resultado de que c cambia de su valor 3/2 para condiciones periódicas, al propio de la serie unitaria superconforme $N = 1$. Este ejemplo tuvo el interés adicional de verificar la analogía entre las condiciones de línea de defecto o twisteadas y las de cadena abierta invariante, una conexión también sugerente desde el punto de vista algebraico. En el caso de las cadenas nilpotentes (modelo XX en campo magnético), las condiciones de cadena abierta no alteraban el resultado periódico para la extensión central, al menos en el caso $q^4 = 1$; sin embargo, este sistema quizá resulta demasiado sencillo a este respecto, ya que (aparte de ser un modelo sin interacción) aquí las contribuciones de las fronteras suponen un campo según la dirección z que conmuta con el resto del hamiltoniano y se suma de una manera trivial al campo magnético ya existente en el modelo. Sin embargo, sí que podríamos esperar cambios no triviales de la física en el régimen anisótropo (esto es, elíptico) gracias a las correspondientes matrices $K_\pm$. Aquí resulta menos trivial la adición de términos de frontera, ya que el espín total $\mathcal{S}^z$ deja de ser un número conservado. Ya se citó por un lado la inexistencia de divergencias observada por Hinrichsen y Rittenberg 1993 en el caso de correlaciones de operadores invariantes bajo el álgebra cuántica; y por otro, la relevancia del operador H_{CTM} en el cálculo por métodos algebraicos de funciones de correlación, observada en casos como el modelo 6V (y de hecho también el 8V, Jimbo et al. 1993). Sería así muy interesante plantear en este contexto el problema del hamiltoniano invariante $CH_q(2)$ examinando las novedades respecto al caso de cadena cerrada. Y de manera relacionada, diagonalizar el H_{CTM} en un retículo como el del capítulo 5, pero con la inserción adicional de una línea de defecto dada por nuestras matrices $K_\pm$ elípticas.

Del estudio de las cadenas abiertas nilpotentes se han podido extraer conclusiones tanto de tipo físico, como otras de carácter más algebraico. Entre las primeras están las ya citadas de la construcción de las cadenas invariantes y sus consecuencias sobre la extensión central (aquí es donde se hace patente la necesidad de completar el estudio con el caso $q^3 = 1$). Entre las segundas se encuentra la caracterización del centralizador en estos casos. Sería interesante estudiar de nuevo con más detalle el caso cúbico, como modificación del cociente de Hecke que supone para el caso regular correspondiente el álgebra de Birman–Wenzl–Murakami, así como buscar si también existe aquí un casimir adicional análogamente a los casos $N' = 2$ y $N' = \infty$. La búsqueda de la generalización elíptica del caso nilpotente cuadrático nos llevó a considerar la matriz 8V de fermiones libres de Bazhanov–Stroganov, y a la definición de las álgebras $CH_q(2)$ y $C\widehat{H_q}(2)$. Se ha visto asimismo que estas estructuras están relacionadas con generalizaciones de supersimetría $N = 2$. La matriz $R(u)$ de BS supone, en tanto que modelo de ocho vértices elíptico, un caso muy parecido al de Baxter, y era por eso muy interesante estudiar la estructura de álgebra cuántica asociada a esta matriz. En relación con esto, ya se ha citado más arriba la conveniencia de proseguir el trabajo en el sentido de completar la estructura afín del álgebra $C\widehat{H_q}(2)$. Esta idea es la que nos llevó en el capítulo 5 a diagonalizar H_{CTM} para este modelo de fermiones libres, con lo que se consiguió resolver el caso más general de toda una serie de modelos notables estudiados previamente en la literatura. Este cálculo suscita además el estudio, iniciado por otros autores de manera simultánea a nuestra solución para el espectro de H_{CTM}, de generalizaciones de polinomios ortogonales elípticos. Pero la matriz $R(u)$ permite que nos hagamos otras preguntas en el contexto de las álgebras cuánticas. Entre ellas estaría estudiar el límite semiclásico $q \to 1$, así como el álgebra subyacente al límite hiperbólico (línea de desorden).

En resumen, el estudio a través de los grupos cuánticos de los modelos integrables de vértices en el caso de cadenas abiertas, nos ha permitido una mejor comprensión tanto de la física relacionada con unas estructuras algebraicas de muy reciente introducción en la Física Teórica, como comprender algo mejor desde un punto de vista más formal el fenómeno de la integrabilidad en modelos ya conocidos incluso desde hace largo tiempo. Por supuesto, muchísimas cuestiones han quedado sin contestar en esta memoria, pero nos gustaría al menos haber contribuido a transmitir la idea de que el estudio de la teoría de sistemas integrables puede llevar al desarrollo o descubrimiento de ricas estructuras teóricas, así como a la consideración de problemas físicos interesantes.

Capítulo 8

Referencias

I. Affleck, *Universal term in the free energy at a critical point and the conformal anomaly*, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 746.

F. C. Alcaraz, M. N. Barber, M. T. Batchelor, R. J. Baxter y G. R. W. Quispel, *Surface exponents of the quantum XXZ, Ashkin–Teller and Potts models*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **20** (1987) 6397.

L. Álvarez–Gaumé, G. Sierra y C. Gómez, *Quantum group interpretation of some conformal field theories*, Phys. Lett. **B220** (1989) 142.

L. Álvarez–Gaumé, G. Sierra y C. Gómez, *Duality and quantum groups*, Nucl. Phys. **B330** (1990) 347.

H. Araki, *Master Symmetries of the XY Model*, Commun. Math. Phys. **132** (1990) 155.

D. Arnaudon, *Fusion rules and R–matrix for the composition of regular spins with semi–periodic representations of $SL(2)_q$*, Phys. Lett. **B268** (1991) 217.

H. M. Babujian, *Exact solution of the isotropic Heisenberg chain with arbitrary spins: Thermodynamics of the model*, Nucl. Phys. **B215** [**FS7**] (1983) 317.

H. M. Babujian y A. M. Tsvelick, *Heisenberg magnet with an arbitrary spin and anisotropic chiral field*, Nucl. Phys. **B265** [**FS15**] (1986) 24.

E. Barouch y B. M. McCoy, *Statistical Mechanics of the XY Model II. Spin Correlation Functions*, Phys. Rev. **A3** (1971) 3.

M. T. Batchelor, L. Mezincescu, R. I. Nepomechie y V. Rittenberg, *q–deformations of the $O(3)$ symmetric spin–1 Heisenberg chain*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **23** (1990) L141.

R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, Norwich (1982).

R. J. Baxter, *Free-fermion, checkerboard and Z–invariant models in statistical mechanics*, Proc.

R. Soc. Lond. **A 404** (1986) 1.

V. V. Bazhanov, *Integrable quantum systems and classical Lie algebras*, Commun. Math. Phys. **113** (1986) 471.

V. V. Bazhanov y Yu. G. Stroganov, *Chiral Potts models as a descendant of the six–vertex models*, Jour. Stat. Phys. **51** (1990) 799.

V. V. Bazhanov y Yu. G. Stroganov, *Hidden symmetry of free fermion model. I. Triangle equations and symmetric parametrization*, Theor. Math. Phys. **62** (1985) 253.

A. A. Belavin, A. M. Polyakov y A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two–dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333.

A. Berkovich, C. Gómez y G. Sierra, *On a new class of integrable models*, Int. Jour. Mod. Phys. **B6** (1992) 1939.

A. Berkovich, C. Gómez y G. Sierra, *Spin–Anisotropy Commensurable Chains: Quantum Group Symmetries and* $N = 2$ *SUSY*, Nucl. Phys. **B** en prensa (1993).

D. Bernard y A. LeClair, *The fractional supersymmetric sine-Gordon models*, Phys. Lett. **B247** (1990) 309.

H. W. Blöte, J. L. Cardy y M. P. Nightingale, *Conformal invariance, the central charge and universal finite–size amplitudes at criticality*, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 742.

P. F. Byrd y M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer–Verlag, Heidelberg (1971).

J. L. Cardy, *Operator content of two–dimensional conformally invariant theories*, Nucl. Phys. **B270 [FS16]** (1986) 186.

J. L. Cardy, *Conformal invariance and statistical mechanics*, en *Fields, strings and critical phenomena*, recopilado por E. Brézin y J. Zinn–Justin, Les Houches 1988 sesión XLIX, North–Holland, Amsterdam (1990).

I. V. Cherednik, *Factorizing particles on a half line and root systems*, Theor. Math. Phys. **67** (1984) 977.

T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, Nueva York (1978).

R. Coquereaux, *Modulo 8 periodicity of real Clifford algebras and particle physics*, Phys. Lett. **B115** (1982) 389.

R. Cuerno, *Spectrum of an Elliptic Free Fermionic Corner Transfer Matrix Hamiltonian*, preprint IMAFF 93/13 (1993).

R. Cuerno, G. Sierra y C. Gómez, *On integrable quantum group invariant antiferromagnets*, Jour. Geom. Phys. **11** (1993a) 453.

R. Cuerno, C. Gómez, E. López y G. Sierra, *The Hidden Quantum Group of the 8–vertex Free Fermion Model: q–Clifford Algebras*, Phys. Lett. **B307** (1993b) 56.

R. Cuerno y A. González–Ruiz, *Free Fermionic Elliptic Reflection Matrices and Quantum Group Invariance*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **26** (1993) L605.

S. Dasmahapatra, R. Kedem, T. R. Klassen, B. M. McCoy y E. Melzer, *Quasi-Particles, Conformal Field Theory, and q-Series*, preprint ITP-SB-93-12, RU-93-07, hep-th/9303013 (1993).

E. Date, M. Jimbo, K. Miki y T. Miwa, *R matrix for cyclic representations of $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(3, \mathbf{C}))$ at $q^3 = 1$*, Phys. Lett. **A148** (1990a) 45.

E. Date, M. Jimbo, K. Miki y T. Miwa, *Generalized Chiral Potts models and minimal cyclic representations of $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(n+1, \mathbf{C}))$*, Commun. Math. Phys. **137** (1991) 133.

B. Davies, *Corner transfer matrices for the Ising model*, Physica **A154** (1988) 1.

B. Davies, O. Foda, M. Jimbo, T. Miwa y A. Nakayashiki, *Diagonalization of the XXZ Hamiltonian by Vertex Operators*, Commun. Math. Phys. **151** (1993) 89.

C. De Concini y V. G. Kač, *Representations of quantum groups at roots of 1*, Prog. Math. **92** (1990) 471.

T. Deguchi y Y. Akutsu, *Graded solutions of the Yang–Baxter relation and link polynomials*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **23** (1990) 1861.

C. Destri y H. J. de Vega, *Twisted boundary conditions in conformally invariant theories*, Phys. Lett. **B223** (1989) 365.

H. J. de Vega, *Families of commuting transfer matrices and integrable models with disorder*, Nucl. Phys. **B240 [FS12]** (1984) 495.

H. J. de Vega, *Yang–Baxter Algebras, Integrable Theories and Quantum Groups*, Int. Jour. Mod. Phys. **A4** (1989) 2371.

H. J. de Vega y A. González–Ruiz, *Boundary K–matrices for the XYZ, XXZ and XXX spin chains*, preprint LPTHE–PAR 93/29 (1993).

H. J. de Vega y F. Woynarovich, *Method for calculating finite size corrections in Bethe Ansatz* *systems: Heisenberg chain and six–vertex model*, Nucl. Phys. **B251** (1985) 439.

H. J. de Vega y F. Woynarovich, *Solution of the Bethe ansatz equations with complex roots for finite size: the spin $S \geq 1$ isotropic and anisotropic chains*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **23** (1990) 1613.

V. Drinfeld, *Quantum Groups*, en *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, recopilado por E. Gleason, AMS Berkeley (1986).

H.-P. Eckle y T. T. Truong, *Corner transfer matrix of a critical free Fermion system*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **25** (1992) L535.

H.-P. Eckle y T. T. Truong, *Spectrum of a corner transfer matrix with a line of defects*, Phys. Lett. **A177** (1993a) 81.

H.-P. Eckle y T. T. Truong, *Corner transfer matrix of generalised free fermion vertex systems*, preprint cond-mat/9308009 (1993b).

L. Fadeev, *Integrable models in (1+1)–dimensional quantum field theory*, en *Recent advances in field theory and statistical mechanics*, recopilado por J. B. Zuber y R. Stora, Les Houches 1982 sesión XXXIX, North–Holland, Amsterdam (1982).

C. Fan y F. Y. Wu, *Ising Model with Second-Neighbor Interaction.I. Some Exact Results and an Aproximate Solution*, Phys. Rev. **179** (1969) 560.

C. Fan y F. Y. Wu, *General Lattice Models of Phase Transitions*, Phys. Rev. **B2** (1970) 723.

B. U. Felderhof, *Diagonalization of the transfer matrix of the free-fermion model. II*, Physica **66** (1973) 279.

P. Fendley y K. Intriligator, *Scattering and thermodynamics in $N = 2$ theories*, Nucl. Phys. **B380** (1992) 265.

I. B. Frenkel y N. Yu. Reshetikhin, *Quantum Affine Algebras and Holonomic Difference Equations*, Commun. Math. Phys. **146** (1992) 1.

D. Friedan, Z. Qiu y S. Shenker, *Conformal Invariance, Unitarity and Critical Exponents in Two Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1575.

D. Friedan, Z. Qiu y S. Shenker, *Superconformal invariance in two dimensions and the tricritical Ising model*, Phys. Lett. **B151** (1985) 37.

H.-C. Fu, M. L. Ge y K. Xue, *Yang–Baxterization of reflection equations for $\check{R}$ with two distinct eigenvalues*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **26** (1993) L847.

M. L. Ge, X., F. Liu y C. P. Sun, *New boson representations of the $sl_q(2)$ with multiplicity 2 and new solutions to the Yang–Baxter equation at $q^p = 1$*, Lett. Math. Phys. **23** (1991) 169.

G. v. Gehlen, V. Rittenberg y H. Ruegg, *Conformal invariance and finite one–dimensional quantum chains*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **19** (1985) 107.

P. Goddard y D. Olive, *Kač-Moody and Virasoro Algebras in Relation to Quantum Physics*, Int. Jour. Mod. Phys. **A1** (1986) 303.

C. Gómez y G. Sierra, *A new solution to the star–triangle equation based on $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ at roots of unity*, Nucl. Phys. **B373** (1992a) 761.

C. Gómez y G. Sierra, *New integrable deformations of higher spin Heisenberg–Ising chains*, Phys. Lett. **B285** (1992b) 126.

C. Gómez y G. Sierra, *Quantum harmonic oscillator algebra and link invariants*, Jour. Math. Phys. **34** (1993) 2119.

M. D. Gould y Y.-Z. Zhang, *Casimir Invariants for Quantized Affine Lie Algebras*, preprint UQMATH-93-04 (1993).

A.-G. Greenhill, *The Applications of Elliptic Functions*, Macmillan, Nueva York (1892).

C. J. Hamer, G. R. W. Quispel y M. T. Batchelor, *Conformal anomaly and surface energy for Potts and Ashkin–Teller models*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **20** (1987) 5677.

M. Hamermesh, *Group Theory and its applications to physical problems*, Dover, Nueva York (1989).

H. Hinrichsen y V. Rittenberg, *A two–parameter deformation of the $SU(1,1)$ superalgebra and the XY quantum chain in a magnetic field*, Phys. Lett. **B275** (1992a) 350.

H. Hinrichsen y V. Rittenberg, *The Pokrovski–Talapov phase transition and quantum groups*, preprint CERN-TH.6411/92 (1992b).

H. Hinrichsen y V. Rittenberg, *Quantum groups, correlation functions and infrared divergences*, preprint BONN HE-93-02 (1993).

H. Itoyama y H. B. Thacker, *Integrability and Virasoro symmetry of the noncritical Baxter/Ising model*, Nucl. Phys. **B320** (1989) 541.

M. Jimbo, *A q–difference analogue of $\mathcal{U}(g)$ and the Yang–Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985) 63.

M. Jimbo, *A q–analogue of $\mathcal{U}_q(gl(N+1))$, Hecke Algebra, and the Yang–Baxter equation*, Lett.

Math. Phys. **11** (1986a) 247.

M. Jimbo, *Quantum R Matrix for the Generalized Toda System*, Commun. Math. Phys. **102** (1986b) 537.

M. Jimbo, T. Miwa y A. Nakayashiki, *Difference equations for the correlation functions of the eight vertex model*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **26** (1993) 2199.

V. F. R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. Math. **126** (1987) 335.

V. F. R. Jones, *Baxterization*, Int. Jour. Mod. Phys. **A6** (1991) 2035.

S. Katsura, *Statistical Mechanics of the Anisotropic Linear Heisenberg Model*, Phys. Rev. **127** (1962) 1508.

L. H. Kauffman, *Knots and Physics*, World Scientific, Singapur (1991).

L. H. Kauffman y H. Saleur, *Free Fermions and the Alexander–Conway polynomial*, Commun. Math. Phys. **141** (1991) 293.

G. Keller, *Fusion rules of $\mathcal{U}_q(SL(2,\mathbf{C}))$, $q^m = 1$*, Lett. Math. Phys. **21** (1991) 273.

D. Kim y P. A. Pearce, *Scaling dimensions and conformal anomaly in anisotropic lattice spin models*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **20** (1987) L451.

A. N. Kirillov y N. Yu. Reshetikhin, *Exact solution of the integrable XXZ Heisenberg model with arbitrary spin I: The ground state en the excitation spectrum*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **20** (1987) 1565; ibíd. 1587.

A. Klümper y M. T. Batchelor, *An analytic treatment of finite–size corrections in the spin–1 antiferromagnetic XXZ chain*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **23** (1990) L189.

A. Klümper, M. T. Batchelor y P. A. Pearce, *Central charges of the 6– and 19–vertex models with twisted boundary conditions*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **24** (1991) 3111.

J. B. Kogut, *An introduction to lattice gauge theory and spin systems*, Rev. Mod. Phys. **51** (1976) 659.

T. H. Koornwinder, *Orthogonal Polynomials in Connection with Quantum Groups*, en *Orthogonal Polynomials: Theory and Practice*, recopilado por P. Nevai, Serie NATO ASI Vol. **C294**, Kluwer, Dordrecht (1990).

P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin y E. K. Sklyanin, *Yang–Baxter equation and representation theory: I*, Lett. Math. Phys. **5** (1981) 393.

P. P. Kulish y E. K. Sklyanin, *Quantum Spectral Transform Method. Recent Developments*, Lecture Notes in Physics, **151** (1982) 61.

P. P. Kulish y E. K. Sklyanin, *The general $U_q(sl(2))$ invariant XXZ integrable quantum spin chain*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **24** (1991) L435.

P. P. Kulish y E. K. Sklyanin, *Algebraic structures related to reflection equations*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **25** (1992) 5963.

H. C. Lee, *Tangles, Links and Twisted Quantum Groups*, en *Physics, Geometry and Topology*, recopilado por H. C. Lee, Serie NATO ASI Vol. **B238**, Plenum, Nueva York (1990).

E. Lieb, T. Schultz y D. Mattis, *Two soluble models of an Antiferromagnetic Chain*, Ann. Phys. **16** (1961) 407.

E. López, *Quantum Clifford-Hopf Algebras for Even Dimensions, Extended Supersymmetry and Generalized XY Spin Chains*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. en prensa (1993).

M. Lüscher, *Dynamical charges in the quantized renormalized massive Thirring model*, Nucl. Phys. **B117** (1976) 475.

P. P. Martin y V. Rittenberg, *A template for quantum spin chain spectra*, Int. Jour. Mod. Phys. **A7**, Suppl. **1B** (1992b) 707.

M. J. Martins, *Critical properties of $\mathcal{U}_q(sl(2))$–invariant spin–1 chain*, Phys. Lett. **A151** (1990) 519.

D. C. Mattis, *The many-body problem. An Encyclopedia of Exactly Solved Models in One Dimension*, World Scientific, Singapur (1993).

L. Mezincescu y R. I. Nepomechie, *Integrable open chains with non–symmetric R-matrices*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **24** (1991a) L17.

L. Mezincescu y R. I. Nepomechie, *Integrability of open spin chains with quantum algebra symmetry*, Int. Jour. Mod. Phys. **A6** (1991b) 5231 y *Addendum*, Int. Jour. Mod. Phys. **A7** (1992a) 5657.

L. Mezincescu y R. I. Nepomechie, *Fusion Procedure for Open Chains*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **25** (1992b) 2533.

L. Mezincescu y R. I. Nepomechie, *Analytical Bethe Ansatz for Quantum-Algebra-Invariant Spin Chains*, Nucl. Phys. **B372** (1992c) 597.

L. Mezincescu y R. I. Nepomechie, *Introduction to the thermodynamics of spin chains*, preprint UMTG-170, hep-th/9212124 (1992d).

L. Mezincescu, R. I. Nepomechie y V. Rittenberg, *Bethe Ansatz solution of the Fateev–Zamolodchikov quantum spin chain with boundary terms*, Phys. Lett. **A147** (1990) 70.

J. Murakami, *The free fermion model in presence of field related to the quantum group $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ of affine type and the multi–variable Alexander polynomial of links*, Int. Jour. Mod. Phys. **A7**, Suppl. **1B** (1992) 765.

V. Pasquier y H. Saleur, *Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups*, Nucl. Phys. **B330** (1990) 523.

P. A. Pearce y A. Klümper, *Finite–Size Corrections and Scaling Dimensions of Solvable Lattice Models: An Analytic Method*, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 974.

I. Peschel y T. T. Truong, *Corner Transfer Matrices and Conformal Invariance*, Z. Phys. **B69** (1987) 385.

N. Yu. Reshetikhin, *Quantized universal enveloping algebras, the Yang–Baxter equation and invariants of links I*, preprint LOMI E-4-87 (1987a); *II*, preprint LOMI E-17-87 (1987b).

N. Yu. Reshetikhin y M. A. Semenov–Tian–Shansky, *Central extensions of quantum current groups*, Lett. Math. Phys. **19** (1990) 133.

N. Yu. Reshetikhin y V. G. Turaev, *Ribbon graphs and Their Invariants Derived from Quantum Groups*, Commun. Math. Phys. **127** (1990) 1.

P. Roche y D. Arnaudon, *Irreducible Representations of the Quantum Analogue of SU(2)*, Lett. Math. Phys. **4** (1989) 295.

L. Rozansky y H. Saleur, *Quantum field theory for the multi-variable Alexander–Conway polynomial*, Nucl. Phys. **B376** (1992) 461.

M. Ruiz–Altaba, *New Solutions to the Yang–Baxter Equation from Two–Dimensional Representations of $\mathcal{U}_q(sl(2))$ at Roots of Unit*, Phys. Lett. **B279** (1992) 326.

H. Saleur, *Polymers and percolation in two dimensions and twisted $N = 2$ supersymmetry*, Nucl. Phys. **B382** (1992) 486.

H. Saleur y M. Bauer, *On some relations between local height probabilities and conformal invariance*, Nucl. Phys. **B320** (1989) 591.

C. Schwiebert, *Reflection equations and link polynomials for arbitrary genus solid tori*, preprint YITP/U-92-38, hep-th/9201023 (1992).

E. K. Sklyanin, *Some algebraic structures connected with the Yang–Baxter relation*, Func. Anal. Appl. **16** (1982) 263.

E. K. Sklyanin, *Some algebraic structures connected with the Yang–Baxter relation. Representations of Quantum Algebras*, Func. Anal. Appl. **17** (1983) 273.

E. K. Sklyanin, *Boundary conditions for integrable quantum systems*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **21** (1988) 2375.

E. K. Sklyanin, *Quantum Inverse Scattering Method. Selected Topics*, en *Quantum Groups and Quantum Integrable Models*, recopilado por Mo-Lin Ge, World Scientific, Singapur (1992).

K. Sogo, *Ground state and low–lying excitations in the Heisenberg XXZ chain of arbitrary spin S*, Phys. Lett. **A104** (1984) 51.

K. Sogo, Y. Akutsu y T. Abe, *New Factorized S–Matrix and Its Application to Exactly Solvable q–State Model. I*, Prog. Theor. Phys. **70** (1983) 730.

K. Sogo, M. Uchinami, Y. Akutsu y M. Wadati, *Classification of Exactly Solvable Two–Component Models*, Prog. Theor. Phys. **68** (1982) 508.

L. A. Takhtadzhan, *The picture of low–lying excitations in the isotropic Heisenberg chain of arbitrary spins*, Phys. Lett. **A87** (1982) 479.

L. A. Takhtadzhan y L. D. Faddeev, *The Quantum Method of the Inverse Problem and the Heisenberg XYZ Model*, Russ. Math. Surveys **34** (1979) 11.

M. G. Tetel'man, *Lorentz group for two–dimensional integrable lattice theories*, Sov. Phys. JETP **55** (1982) 306.

H. B. Thacker, *Corner Transfer Matrices and Lorentz invariance on a lattice*, Physica **D18** (1986) 348.

T. T. Truong e I. Peschel, *The corner transfer matrix of some free-fermion systems and Meixner's polynomials*, Int. Jour. Mod. Phys. **B4** (1990) 895.

V. G. Turaev, *The Yang–Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. **92** (1988) 527.

H. G. Vaidya y C. A. Tracy, *Transverse time-independent spin correlation functions for the one-dimensional XY model at zero temperature*, Physica **A92** (1978) 1.

M. Wadati, T. Deguchi y Y. Akutsu, *Exactly solvable models and knot theory*, Phys. Rep. **180** (1989) 247.

H. Wenzl, *Hecke algebras of type A_n and subfactors*, Invent. Math. **92** (1988) 349.

F. Woynarovich y H.-P. Eckle, *Finite-size corrections and numerical calculations for long spin-$\frac{1}{2}$ Heisenberg chains in the critical region*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. **20** (1987) L97.

A. B. Zamolodchikov y V. A. Fateev, *A model factorized S–matrix and an integrable spin–1 Heisenberg hamiltonian*, Sov. Jour. Nucl. Phys. **32** (1980) 298.

A. B. Zamolodchikov y A. B. Zamolodchikov, *Factorized S-Matrices in Two Dimensions as the Exact Solutions of Certain Relativistic Quantum Field Theory Models*, Ann. Phys. **120** (1979) 253.

R. B. Zhang, M. D. Gould y A. J. Bracken, *Quantum Group Invariants and Link Polynomials*, Commun. Math. Phys. **137** (1991) 13.